

JOURNÉE SCIENTIFIQUE DE LA FÉDÉRATION CHARLES HERMITE

« ESTIMATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES »

JEUDI 6 OCTOBRE 2016 – 9 H 15 A 16 H 00
ENSEM-CRAN – salle 124 jaune

Dans de nombreuses applications, les variables requises pour la commande ou la surveillance ne sont pas accessibles par la mesure. Une solution consiste alors à estimer ces variables en utilisant un modèle des dynamiques et les données fournies par les capteurs disponibles : on parle d'observateur. Des solutions efficaces existent pour les systèmes linéaires en dimension finie, mais de nombreux problèmes fondamentaux restent ouverts pour les systèmes non-linéaires et les systèmes de dimension infinie en général. L'objectif de cette journée est de rassembler des acteurs nationaux du domaine et d'échanger sur leurs récentes contributions qu'elles soient théoriques ou applicatives.

PROGRAMME DE LA JOURNÉE

- 9h15 Accueil – Romain Postoyan et Julie Valein
- 9h30 - 10h15 **« Sur la généricité de l'observabilité pour les systèmes non linéaires »**
Jean-Claude Vivalda (IECL)
- 10h15 - 10h30 Pause café
- 10h30 - 11h15 **« Observers for finite dimensional nonlinear systems and the left inversion problem »**
Vincent Andrieu (LAGEP)
- 11h15 - 12h00 **« Low-power high-gain observers »**
Daniele Astolfi (CRAN)
- 12h00 - 13h30 Pause déjeuner : Buffet
- 13h30 - 14h15 **« Systèmes linéaires invariants en temps de dimension infinie : un aperçu »**
Ghislain Haine (ISAE)
- 14h15 – 15h00 **« Observateurs pour les systèmes stochastiques »**
Michel Zasadzinski (CRAN)
- 15h00 – 15h45 **« Théorie du contrôle et chiffreurs auto-synchronisants pour les communications sécurisées »**
Gilles Millérioux (CRAN)
- 15h45 – 16h30 Discussions

Résumés

9h30 – 10h15 **« Sur la généricité de l'observabilité pour les systèmes non linéaires »**
Jean-Claude Vivalda (IECL)

Il est bien connu que l'observabilité d'un système linéaire ne dépend pas de l'entrée mais seulement des matrices d'état A et de sortie C ; c'est-à-dire que la fonction qui états initial vers trajectoire de sortie est injective pour tout contrôle ou bien n'est injective pour aucun contrôle. D'autre part l'ensemble des couples de matrices (A,C) qui rendent le système observable est un ouvert partout dense.

La situation est toute différente pour les systèmes non linéaires. Considérons un tel système que nous écrivons $\dot{x} = f(x, u), y = h(x, u)$ avec $x \in M$, une variété différentielle de dimension n , $u \in U \subseteq R_u^d$ et $y \in R_y^d$.

Depuis les travaux de J.P. Gauthier et I. Kupka, on sait que les couples (f, h) qui rendent le système observable est partout dense pourvu que le nombre de sorties d_y soit strictement supérieur au nombre d'entrées d_u . Ce résultat a été étendu aussi à la classe des systèmes en temps discret.

Dans cet exposé, nous nous proposons de faire un historique de la question, tout en indiquant quels outils mathématiques sont utilisés pour attaquer ce type de problème.

10h30 – 11h15 **« Observers for finite dimensional nonlinear systems and the left inversion problem »**
Vincent Andrieu (LAGEP)

In this talk, I will present some of the main techniques allowing to synthesis an observer when dealing with finite dimensional nonlinear systems. Some conditions (named detectability) that ensure the convergence of the estimate to the state of the system will be presented. Based on these properties, we will investigate the possibility to design an observer. In a second step, assuming stronger assumption (observability), we will then introduce two important classes of nonlinear observers: the high-gain observer and the nonlinear Luenberger observer.

In both cases, the idea is to immerse the given system dynamic into a bigger one having a structure more appropriate for building an observer. The main drawback of such a procedure is the need for inverting on-line an injective immersion. In this work we suggest a solution to overcome this difficulty based on an extension of the initial state space.

11h15 – 12h00 **« Low-power high-gain observers »**
Daniele Astolfi (CRAN)

High-gain observers have been extensively used in nonlinear control since the end of the 80's for their tunability property, namely the fact that the rate of convergence of the observer can be tuned by acting with one single high-gain parameter. This important feature is motivated by the use of observers in output feedback control and it has been proved that this tunability property plays a key role in establishing a nonlinear separation principle. Despite the evident benefits of this class of observers, their use in real applications is questionable due to some drawbacks. Mainly: numerical issues due to the fact that we need to implement coefficients which increases polynomially with the system dimension; the well-known peaking phenomenon; high sensitivity to measurement noise. Motivated by these considerations, we propose a new class of nonlinear high-gain observers, denoted as "low-power high-gain observers", that preserves the same high-gain features but which substantially overtakes (or improves) the aforementioned drawbacks. The low-power high-gain observers are characterized by having coefficients which does not grow with the system dimension, by avoiding the peaking phenomenon and by improving the sensitivity to high-frequency measurement noise. The proposed observers can be used without loss of generality with respect to standard high-gain observers in frameworks of observations, output feedback or output regulation.

13h30 – 14h15 **« Systèmes linéaires invariants en temps de dimension infinie : un aperçu »**
Ghislain Haine (ISAE)

Un système linéaire invariant en temps (continu) Σ décrit l'évolution d'un système dynamique linéaire, et dont la dynamique est statique. À une donnée initiale z_0 et une entrée $u(\cdot)_{[0,t]}$, elle fait correspondre un état courant $z(t)$ et une sortie $y(\cdot)_{[0,t]}$. C'est une modélisation bien connue en automatique, c'est-à-dire quand les espaces vectoriels sous-jacents (où « vivent » $u(t), z_0, z(t)$, et $y(t)$ pour tout $t \geq 0$) sont de dimension finie. En particulier, un résultat classique nous dit qu'il existe quatre matrices A, B, C , et D , de dimensions appropriées, telles que l'on ait la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t) \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

où \dot{z} désigne la dérivée temporelle de z . Équations que l'on complète par la donnée initiale $z(0) = z_0$.

Dans cette présentation, nous parlerons de la généralisation de ces systèmes et des concepts de contrôlabilité/stabilisabilité et d'observabilité/déteçtabilité qui sous-tendent l'existence d'observateurs (en horizon infini) lorsque l'on s'intéresse à des espaces de Hilbert en toute généralité. En effet, il s'agit du cadre classique de la réécriture d'un grand nombre d'équations aux dérivées partielles (linéaires) sous la forme qui nous intéresse.

14h15 – 15h00 **« Observateurs pour les systèmes stochastiques »**
Michel Zasadzinski (CRAN)

Après un rappel succinct sur les équations différentielles stochastiques à temps continu, le calcul d'Itô et quelques notions de stabilité du point d'équilibre de ces équations, le problème de la synthèse d'un observateur pour un système décrit par ces équations est posé en considérant la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre comme critère de stabilité de l'erreur d'observation. La synthèse de la classe d'observateurs considérée est basée sur un résultat de découplage associé au type de stabilité considéré et sur une extension de la formule d'Itô aux équations algébro-différentielles stochastiques. Cette approche permet d'utiliser une approche descripteur avec des fonctions de Lyapunov polynômiales pour une classe particulière d'équations différentielles stochastiques non linéaires. Un exemple numérique est proposé pour illustrer l'approche mise en œuvre.

15h00 – 15h45 **« Théorie du contrôle et chiffreurs auto-synchronisants pour les communications sécurisées »**
Gilles Millérioux (CRAN)

La sécurité des échanges d'informations numériques constitue actuellement un enjeu majeur aussi bien pour les réseaux de grande taille (internet, smart grids) ou de plus petite échelle (systèmes embarqués). Dans ce contexte, la cryptographie est indéniablement centrale. Parmi de nombreuses classes de chiffreurs, les chiffreurs autosynchronisants, bénéficient d'une facilité d'implémentation adaptée à des systèmes légers possédant des ressources limitées en capacité de calcul et/ou bande passante. Dès le début des années 90, certaines constructions ont été proposées, mais toutes les cryptanalyses, sans exception, ont révélé des failles. L'objectif de la présentation est de montrer que l'exploitation conjointe des outils de la théorie du contrôle, de la théorie des graphes et de l'analyse structurelle, permet de proposer de nouvelles architectures autosynchronisantes. Il est en particulier montré que la reconstruction d'état, une question importante en Automatique, joue un rôle essentiel.

Sur la généricité de l'observabilité

Jean-Claude Vivalda



Journée FCH, 6 octobre 2016

Systemes linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cu \end{cases}$$

L'observabilité ne dépend pas de l'entrée u .

Critère de Kalman : le système est observable ssi le rang de la matrice

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à la dimension de l'état n .

L'ensemble des paires de matrices $(A, C) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{p \times n}$ tels que $\text{rg}(\mathcal{K}) < n$ est un ensemble algébrique, donc l'ensemble des paires qui rendent le système linéaire observable est un ouvert dense.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cu \end{cases}$$

L'observabilité ne dépend pas de l'entrée u .

Critère de Kalman : le système est observable ssi le rang de la matrice

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à la dimension de l'état n .

L'ensemble des paires de matrices $(A, C) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{p \times n}$ tels que $\text{rg}(\mathcal{K}) < n$ est un ensemble algébrique, donc l'ensemble des paires qui rendent le système linéaire observable est un ouvert dense.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cu \end{cases}$$

L'observabilité ne dépend pas de l'entrée u .

Critère de Kalman : le système est observable ssi le rang de la matrice

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à la dimension de l'état n .

L'ensemble des paires de matrices $(A, C) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{p \times n}$ tels que $\text{rg}(\mathcal{K}) < n$ est un ensemble algébrique, donc l'ensemble des paires qui rendent le système linéaire observable est un ouvert dense.

Observabilité - Un exemple

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = x_1^2 + x_2^2$$

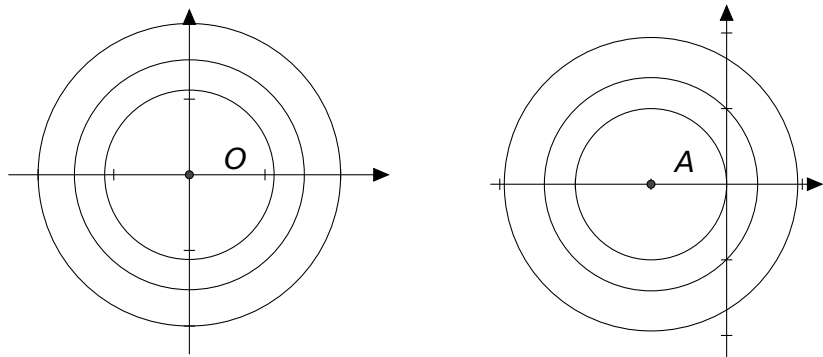


Figure : Trajectoires avec $u \equiv 0$ et $u \equiv 1$

Observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

$x \in X$, variété différentielle de dimension n , $u \in U \subset \mathbf{R}^{d_u}$ et $y \in \mathbf{R}^{d_y}$. On définit l'application

$$\begin{aligned} P: X \times L^\infty(U) &\longrightarrow \mathbf{R}^{d_y} \\ (x_0, u) &\longmapsto t \mapsto h(x(t)) \end{aligned}$$

avec $x(0) = x_0$ et $x(t)$ solution de $\dot{x} = f(x, u)$.

Définition

On dira que le système (1) est observable si pour tout triplet (x_0, \bar{x}_0, u) avec $x_0 \neq \bar{x}_0$, l'ensemble

$$\{ t \geq 0 \mid P(x_1, u)(t) \neq P(x_2, u)(t) \}$$

est de mesure non nulle.

Observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Soient x_0 et \bar{x}_0 deux conditions initiales ; supposons que $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout $t \geq 0$, alors en dérivant nous avons

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \nabla h(x(t)) \cdot f(x(t))$$

donc si $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout t

$$\nabla h(x(t)) \cdot f(x(t)) = \nabla h(\bar{x}(t)) \cdot f(\bar{x}(t)), \forall t \geq 0$$

On note $L_f h$ la fonction $t \mapsto \nabla h(t) \cdot f(x(t))$, en dérivant successivement et en faisant $t = 0$, on obtient :

$$h(x_0) = h(\bar{x}_0), \quad L_f h(x_0) = L_f h(\bar{x}_0), \quad \dots, L_f^k h(x_0) = L_f^k h(\bar{x}_0), \dots$$

Observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Soient x_0 et \bar{x}_0 deux conditions initiales ; supposons que $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout $t \geq 0$, alors en dérivant nous avons

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \nabla h(x(t)) \cdot f(x(t))$$

donc si $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout t

$$\nabla h(x(t)) \cdot f(x(t)) = \nabla h(\bar{x}(t)) \cdot f(\bar{x}(t)), \forall t \geq 0$$

On note $L_f h$ la fonction $t \mapsto \nabla h(t) \cdot f(x(t))$, en dérivant successivement et en faisant $t = 0$, on obtient :

$$h(x_0) = h(\bar{x}_0), \quad L_f h(x_0) = L_f h(\bar{x}_0), \quad \dots, L_f^k h(x_0) = L_f^k h(\bar{x}_0), \dots$$

Observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Soient x_0 et \bar{x}_0 deux conditions initiales ; supposons que $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout $t \geq 0$, alors en dérivant nous avons

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \nabla h(x(t)) \cdot f(x(t))$$

donc si $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$ pour tout t

$$\nabla h(x(t)) \cdot f(x(t)) = \nabla h(\bar{x}(t)) \cdot f(\bar{x}(t)), \forall t \geq 0$$

On note $L_f h$ la fonction $t \mapsto \nabla h(t) \cdot f(x(t))$, en dérivant successivement et en faisant $t = 0$, on obtient :

$$h(x_0) = h(\bar{x}_0), \quad L_f h(x_0) = L_f h(\bar{x}_0), \quad \dots, L_f^k h(x_0) = L_f^k h(\bar{x}_0), \dots$$

Observabilité forte

On considère l'application

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ x &\longmapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))\end{aligned}$$

Dans le cas avec contrôles

$$\begin{aligned}\frac{dh(x)}{dt} &= \nabla h(x) \cdot f(x, u) \triangleq L_f h(x), \\ \frac{dL_f h(x)}{dt} &= \nabla(L_f h(x, u)) \cdot f(x, u) + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial u} \cdot u_1\end{aligned}$$

Observabilité forte

On considère l'application

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ x &\longmapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))\end{aligned}$$

Dans le cas avec contrôles

$$\begin{aligned}\frac{dh(x)}{dt} &= \nabla h(x) \cdot f(x, u) \triangleq L_f h(x), \\ \frac{dL_f h(x)}{dt} &= \nabla(L_f h(x, u)) \cdot f(x, u) + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial u} \cdot u_1\end{aligned}$$

k^e extension dynamique du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u_0) \\ \dot{u}_0 = u_1 \\ \vdots \\ u_{k-2} = u_{k-1} \\ \dot{u}_{k-1} = u_k \\ y = h(x) \end{array} \right.$$

► **Contrôle**



On note

$$f^k(x, u_0, \dots, u_k) = (f(x, u_0), u_1, \dots, u_{k-1})^T + (0, \dots, 0, 1)^T u_k$$

et on peut considérer les dérivées de Lie successives

$$L_{f^k} h, L_{f^k}^2 h, \dots$$

L'application Θ

► Cas sans contrôle

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ x &\longmapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))\end{aligned}$$

► Cas avec contrôle

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X \times U \times \mathbf{R}^{2nd_u} &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_u} \\ (x, u_0, u_1, \dots, u_{2n}) &\longmapsto (h(x), L_{\underline{f}} h(x), \dots, L_{\underline{f}}^{2n} h(x), u)\end{aligned}$$

où on a noté $\underline{f} \triangleq f^{2n+1}$.

L'application Θ

- ▶ Cas sans contrôle

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ x &\longmapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))\end{aligned}$$

- ▶ Cas avec contrôle

$$\begin{aligned}\Theta_{f,h} : X \times U \times \mathbf{R}^{2nd_u} &\longrightarrow \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_u} \\ (x, u_0, u_1, \dots, u_{2n}) &\longmapsto (h(x), L_{\underline{f}} h(x), \dots, L_{\underline{f}}^{2n} h(x), u)\end{aligned}$$

où on a noté $\underline{f} \triangleq f^{2n+1}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2)$$

Définition

On dira que le système (2) est fortement différentiellement observable si l'application $\Theta_{f,h}$ est une immersion injective.

Dans la suite on suppose que

- ▶ X est une variété différentielle compacte ;
- ▶ $U = I^{d_y}$ avec I un intervalle compact, ou encore U est une variété différentielle compacte.
- ▶ le champ de vecteurs f et h sont C^∞ .

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2)$$

Définition

On dira que le système (2) est fortement différentiellement observable si l'application $\Theta_{f,h}$ est une immersion injective.

Dans la suite on suppose que

- ▶ X est une variété différentielle compacte ;
- ▶ $U = I^{d_y}$ avec I un intervalle compact, ou encore U est une variété différentielle compacte.
- ▶ le champ de vecteurs f et h sont C^∞ .

Topologie C^r

- ▶ X et Y deux variétés différentielles, X compacte ;
- ▶ $C^r(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^r et $f \in C^r(X, Y)$;
- ▶ (U, φ) et (V, ψ) des cartes ;
- ▶ $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$ et $\varepsilon > 0$;
- ▶ $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ l'expression locale de f .
- ▶ On note $\mathcal{V}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ l'ensemble des $g \in C^r(X, Y)$ tels que
 - ▶ $g(K) \subset V$;
 - ▶ $\|D^k \tilde{f}(x) - D^k \tilde{g}(x)\| < \varepsilon, \forall x \in \varphi(K), k = 0, \dots, r$

La topologie C^r est engendrée par ces ensembles : un voisinage de f est une intersection finie d'ensemble définis comme ci-dessus.

Topologie C^r

- ▶ X et Y deux variétés différentielles, X compacte ;
- ▶ $C^r(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^r et $f \in C^r(X, Y)$;
- ▶ (U, φ) et (V, ψ) des cartes ;
- ▶ $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$ et $\varepsilon > 0$;
- ▶ $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ l'expression locale de f .
- ▶ On note $\mathcal{V}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ l'ensemble des $g \in C^r(X, Y)$ tels que
 - ▶ $g(K) \subset V$;
 - ▶ $\|D^k \tilde{f}(x) - D^k \tilde{g}(x)\| < \varepsilon, \forall x \in \varphi(K), k = 0, \dots, r$

La topologie C^r est engendrée par ces ensembles : un voisinage de f est une intersection finie d'ensemble définis comme ci-dessus.

Topologie C^r

- ▶ X et Y deux variétés différentielles, X compacte ;
- ▶ $C^r(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^r et $f \in C^r(X, Y)$;
- ▶ (U, φ) et (V, ψ) des cartes ;
- ▶ $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$ et $\varepsilon > 0$;
- ▶ $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ l'expression locale de f .
- ▶ On note $\mathcal{V}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ l'ensemble des $g \in C^r(X, Y)$ tels que
 - ▶ $g(K) \subset V$;
 - ▶ $\|D^k \tilde{f}(x) - D^k \tilde{g}(x)\| < \varepsilon, \forall x \in \varphi(K), k = 0, \dots, r$

La topologie C^r est engendrée par ces ensembles : un voisinage de f est une intersection finie d'ensemble définis comme ci-dessus.

Topologie C^r

- ▶ X et Y deux variétés différentielles, X compacte ;
- ▶ $C^r(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^r et $f \in C^r(X, Y)$;
- ▶ (U, φ) et (V, ψ) des cartes ;
- ▶ $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$ et $\varepsilon > 0$;
- ▶ $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ l'expression locale de f .
- ▶ On note $\mathcal{V}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ l'ensemble des $g \in C^r(X, Y)$ tels que
 - ▶ $g(K) \subset V$;
 - ▶ $\|D^k \tilde{f}(x) - D^k \tilde{g}(x)\| < \varepsilon, \forall x \in \varphi(K), k = 0, \dots, r$

La topologie C^r est engendrée par ces ensembles : un voisinage de f est une intersection finie d'ensemble définis comme ci-dessus.

On suppose toujours X compact.

- ▶ Sur $C^\infty(X, Y)$, on considère la topologie C^∞ qui est la réunion de toutes les topologies C^r .
- ▶ Pour $r < +\infty$, la topologie C^r est métrisable, $C^r(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs sur X sont des espaces de Banach.
- ▶ Munis de la topologie C^∞ , $C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs ne sont plus des espaces de Banach mais ils possèdent la propriété de Baire
 - ▶ toute intersection dénombrable d'ouverts (un résiduel) partout denses est partout dense

On suppose toujours X compact.

- ▶ Sur $C^\infty(X, Y)$, on considère la topologie C^∞ qui est la réunion de toutes les topologies C^r .
- ▶ Pour $r < +\infty$, la topologie C^r est métrisable, $C^r(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs sur X sont des espaces de Banach.
- ▶ Munis de la topologie C^∞ , $C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs ne sont plus des espaces de Banach mais ils possèdent la propriété de Baire
 - ▶ toute intersection dénombrable d'ouverts (un résiduel) partout denses est partout dense

On suppose toujours X compact.

- ▶ Sur $C^\infty(X, Y)$, on considère la topologie C^∞ qui est la réunion de toutes les topologies C^r .
- ▶ Pour $r < +\infty$, la topologie C^r est métrisable, $C^r(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs sur X sont des espaces de Banach.
- ▶ Munis de la topologie C^∞ , $C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$ et l'ensemble des champs de vecteurs ne sont plus des espaces de Banach mais ils possèdent la propriété de Baire
 - ▶ toute intersection dénombrable d'ouverts (un résiduel) partout denses est partout dense

Résultats de généricité

On se place sur une variété X compacte.

- ▶ U est l'ensemble I^{d_u} avec I intervalle compact de \mathbf{R} ou U est une variété compacte de dimension d_u ;
- ▶ Un système est la donnée d'un couple (f, h) tel que
 - ▶ $f : X \times U \rightarrow TX$, pour tout u $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs C^r ($1 \leq r \leq \infty$);
 - ▶ $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{d_y}$ est une application de classe C^r .

Résultats de généricité

On se place sur une variété X compacte.

- ▶ U est l'ensemble I^{d_u} avec I intervalle compact de \mathbf{R} ou U est une variété compacte de dimension d_u ;
- ▶ Un système est la donnée d'un couple (f, h) tel que
 - ▶ $f : X \times U \rightarrow TX$, pour tout u $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs C^r ($1 \leq r \leq \infty$);
 - ▶ $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{d_y}$ est une application de classe C^r .

Résultats de généricité

On se place sur une variété X compacte.

- ▶ U est l'ensemble I^{d_u} avec I intervalle compact de \mathbf{R} ou U est une variété compacte de dimension d_u ;
- ▶ Un système est la donnée d'un couple (f, h) tel que
 - ▶ $f : X \times U \rightarrow TX$, pour tout u $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs C^r ($1 \leq r \leq \infty$);
 - ▶ $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{d_y}$ est une application de classe C^r .

Résultats de généricité

Théorème 1

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble résiduel pour la topologie C^r .

On considère maintenant une borne B sur les dérivées des contrôles et on considère la restriction $\Theta_{f,h}^B$ de $\Theta_{f,h}$ à $X \times U \times [-B, B]^{2nd_u}$.

Théorème 2

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}^B$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble ouvert partout dense pour la topologie C^r .

Résultats de généricité

Théorème 1

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble résiduel pour la topologie C^r .

On considère maintenant une borne B sur les dérivées des contrôles et on considère la restriction $\Theta_{f,h}^B$ de $\Theta_{f,h}$ à $X \times U \times [-B, B]^{2nd_u}$.

Théorème 2

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}^B$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble ouvert partout dense pour la topologie C^r .

Théorème 1

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble résiduel pour la topologie C^r .

On considère maintenant une borne B sur les dérivées des contrôles et on considère la restriction $\Theta_{f,h}^B$ de $\Theta_{f,h}$ à $X \times U \times [-B, B]^{2nd_u}$.

Théorème 2

Supposons $d_y > d_u$, alors l'ensemble des systèmes (f, h) tels que $\Theta_{f,h}^B$ est une immersion injective (i.e. un plongement) contient un ensemble ouvert partout dense pour la topologie C^r .

Théorème 3

Supposons les variétés X et U analytiques. L'ensemble des systèmes *analytiques* tels que $\Theta_{f,h}$ est un plongement est partout dense pour la topologie C^r .

Théorème 4

Pour un système analytique l'observabilité pour toute entrée analytique équivaut à l'observabilité pour toute entrée L^∞ .

Théorème 3

Supposons les variétés X et U analytiques. L'ensemble des systèmes *analytiques* tels que $\Theta_{f,h}$ est un plongement est partout dense pour la topologie C^r .

Théorème 4

Pour un système analytique l'observabilité pour toute entrée analytique équivaut à l'observabilité pour toute entrée L^∞ .

Résultats de généricité

Nous avons vu que l'ensemble des systèmes tels que l'application $\Theta_{f,h}$ est un plongement est résiduel pour la topologie C^r .

Problème ouvert

On ne met aucune condition sur les dérivées de u . Cet ensemble est-il un ouvert dense ?

Résultats de généricité

Nous avons vu que l'ensemble des systèmes tels que l'application $\Theta_{f,h}$ est un plongement est résiduel pour la topologie C^r .

Problème ouvert

On ne met aucune condition sur les dérivées de u . Cet ensemble est-il un ouvert dense ?

Un observateur

On se place dans le cas sans contrôle, avec $h : X \rightarrow \mathbf{R}$ et on suppose que

$$\Theta_{f,h} : x \mapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))$$

est un plongement : *i.e.* $M \triangleq \Theta_{f,h}(X)$ est une sous-variété de \mathbf{R}^{2n+1} . On note $z = \Theta_{f,h}(x)$, soit $x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$. $z(t)$ est alors solution d'un système sur M

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n-1} = z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} = L_f^{2n+1} h(x) = L_f^{2n+1} h(\Theta_{f,h}^{-1}(z)) \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

Un observateur

On se place dans le cas sans contrôle, avec $h : X \rightarrow \mathbf{R}$ et on suppose que

$$\Theta_{f,h} : x \mapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))$$

est un plongement : *i.e.* $M \triangleq \Theta_{f,h}(X)$ est une sous-variété de \mathbf{R}^{2n+1} . On note $z = \Theta_{f,h}(x)$, soit $x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$. $z(t)$ est alors solution d'un système sur M

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n-1} = z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} = L_f^{2n+1} h(x) = L_f^{2n+1} h(\Theta_{f,h}^{-1}(z)) \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

Un observateur

On se place dans le cas sans contrôle, avec $h : X \rightarrow \mathbf{R}$ et on suppose que

$$\Theta_{f,h} : x \mapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))$$

est un plongement : *i.e.* $M \triangleq \Theta_{f,h}(X)$ est une sous-variété de \mathbf{R}^{2n+1} . On note $z = \Theta_{f,h}(x)$, soit $x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$. $z(t)$ est alors solution d'un système sur M

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n-1} = z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} = L_f^{2n+1} h(x) = L_f^{2n+1} h(\Theta_{f,h}^{-1}(z)) \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

Un observateur

On se place dans le cas sans contrôle, avec $h : X \rightarrow \mathbf{R}$ et on suppose que

$$\Theta_{f,h} : x \mapsto (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{2n} h(x))$$

est un plongement : *i.e.* $M \triangleq \Theta_{f,h}(X)$ est une sous-variété de \mathbf{R}^{2n+1} . On note $z = \Theta_{f,h}(x)$, soit $x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$. $z(t)$ est alors solution d'un système sur M

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n-1} = z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} = L_f^{2n+1} h(x) = L_f^{2n+1} h(\Theta_{f,h}^{-1}(z)) \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

Un observateur

L'application

$$z \mapsto L_f^{2n+1} h(\Theta_{f,h}^{-1}(z))$$

est définie pour $z \in M = \Theta_{f,h}(X)$. Il est possible de prolonger cette application à \mathbf{R}^{2n+1} en une application à support compact. On obtient alors un système défini sur \mathbf{R}^{2n+1} tout entier

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n-1} = z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} = \varphi(z) \\ y = z_1 \end{array} \right.$$

avec ψ définie sur \mathbf{R}^{2n+1} , C^∞ à support compact. Pour un tel système il est possible de construire un observateur.

Bibliographie



Jean-Paul Gauthier, Hassan Hammouri and Ivan Kupka
Observers for nonlinear systems
Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control (1991),



Jean-Paul Gauthier and Ivan Kupka
Observability for systems with more outputs than inputs
and asymptotic observers
Mathematische Zeitschrift, vol. 223, pp. 47–78, (1996)



Jean-Paul Gauthier and Ivan Kupka.
Deterministic Observation Theory and Applications.
Cambridge University Press, 2001.

Cas discret

On considère un système donné en temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}$$

L'état x est dans X variété compacte de dimension n ; $u_k \in U$, variété compacte de dimension d_u et $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{d_y}$. De plus, on suppose que, pour tout u , $f(\cdot, u)$ est un difféomorphisme de X . L'analogue de l'application $\Theta_{f,h}$, est l'application obtenue en prenant l'image par h des itérés de f .

- ▶ on note $\underline{u}_k = (u_0, \dots, u_{k-1})$
- ▶ et on définit $f^k(x, \underline{u}_k)$ par récurrence : $f^1(x, \underline{u}_1) = f(x, u_0)$ et $f^{k+1}(x, \underline{u}_{k+1}) = f(f^k(x, \underline{u}_k), u_k)$.

Cas discret

On considère un système donné en temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}$$

L'état x est dans X variété compacte de dimension n ; $u_k \in U$, variété compacte de dimension d_u et $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{d_y}$. De plus, on suppose que, pour tout u , $f(\cdot, u)$ est un difféomorphisme de X . L'analogue de l'application $\Theta_{f,h}$, est l'application obtenue en prenant l'image par h des itérés de f .

- ▶ on note $\underline{u}_k = (u_0, \dots, u_{k-1})$
- ▶ et on définit $f^k(x, \underline{u}_k)$ par récurrence : $f^1(x, \underline{u}_1) = f(x, u_0)$ et $f^{k+1}(x, \underline{u}_{k+1}) = f(f^k(x, \underline{u}_k), u_k)$.

Cas discret

$$\Theta_{f,h} : \begin{array}{ccc} X \times U \times \mathbf{R}^{2nd_u} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_u} \\ (x, u_0, u_1, \dots, u_{2n}) & \longmapsto & (h(x), h(f(x, u_0)), \dots, f^{2n}(x, \underline{u_{2n}})) \end{array}$$

Difficultés qui disparaissent

Plus de dérivée de u à prendre en considération. Une fois démontré la densité des systèmes (f, h) qui font de $\Theta_{f,h}$ un plongement, montrer que ces systèmes forment un ensemble ouvert est simple.

Difficultés qui apparaissent

L'ensemble des difféomorphismes paramétrés n'est plus un espace de Banach pour la topologie C^r . Le rôle joué par les points singuliers dans le cas continu est joué par les points périodiques $(x_{k+1} \stackrel{\Delta}{=} f^k(x_0, \underline{u_k}) = x_0)$.

Cas discret

$$\Theta_{f,h} : \begin{array}{ccc} X \times U \times \mathbf{R}^{2nd_u} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_u} \\ (x, u_0, u_1, \dots, u_{2n}) & \longmapsto & (h(x), h(f(x, u_0)), \dots, f^{2n}(x, \underline{u_{2n}})) \end{array}$$

Difficultés qui disparaissent

Plus de dérivée de u à prendre en considération. Une fois démontré la densité des systèmes (f, h) qui font de $\Theta_{f,h}$ un plongement, montrer que ces systèmes forment un ensemble ouvert est simple.

Difficultés qui apparaissent

L'ensemble des difféomorphismes paramétrés n'est plus un espace de Banach pour la topologie C^r . Le rôle joué par les points singuliers dans le cas continu est joué par les points périodiques ($x_{k+1} \triangleq f^k(x_0, \underline{u_k}) = x_0$).

Cas discret

$$\Theta_{f,h} : \begin{array}{ccc} X \times U \times \mathbf{R}^{2nd_u} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_u} \\ (x, u_0, u_1, \dots, u_{2n}) & \longmapsto & (h(x), h(f(x, u_0)), \dots, f^{2n}(x, \underline{u_{2n}})) \end{array}$$

Difficultés qui disparaissent

Plus de dérivée de u à prendre en considération. Une fois démontré la densité des systèmes (f, h) qui font de $\Theta_{f,h}$ un plongement, montrer que ces systèmes forment un ensemble ouvert est simple.

Difficultés qui apparaissent

L'ensemble des difféomorphismes paramétrés n'est plus un espace de Banach pour la topologie C^r . Le rôle joué par les points singuliers dans le cas continu est joué par les points périodiques ($x_{k+1} \triangleq f^k(x_0, \underline{u_k}) = x_0$).



JCV

On the Genericity of the Observability of Uncontrolled Discrete Nonlinear Systems

[SIAM J. on Cont. & Opt., vol. 42, 2003](#)



Sabeur Ammar and JCV

On the genericity of the observability of controlled discrete-time systems

[ESAIM : COCV, vol. 11, 2005](#)



Sabeur Ammar and JCV

On the Genericity of the Differential Observability of Controlled Discrete-Time Systems

[SIAM J. on Cont. & Opt., vol. 46, 2007](#)

Système échantillonné

Sabeur Ammar, Majid Massaoud et JCV

On considère un système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

on se fixe un temps d'échantillonnage T . On impose au contrôle u d'être constant sur les intervalles $[kT, (k+1)T)$ et les observations se font uniquement aux instants $0, T, 2T, \dots$. On obtient le système discret suivant

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_T^{u_k}(x_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}$$

où φ_t^u désigne le flot associé au champ de vecteurs $f(\cdot, u)$ (u constant).

$$\varphi_0^u(x) = x, \quad \frac{d\varphi_t^u(x)}{dt} = f(\varphi_t^u(x))$$

Système échantillonné

Sabeur Ammar, Majid Massaoud et JCV

On considère un système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

on se fixe un temps d'échantillonnage T . On impose au contrôle u d'être constant sur les intervalles $[kT, (k+1)T)$ et les observations se font uniquement aux instants $0, T, 2T, \dots$. On obtient le système discret suivant

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_T^{u_k}(x_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}$$

où φ_t^u désigne le flot associé au champ de vecteurs $f(\cdot, u)$ (u constant).

$$\varphi_0^u(x) = x, \quad \frac{d\varphi_t^u(x)}{dt} = f(\varphi_t^u(x))$$

Problème

On s'intéresse à l'observabilité du système échantillonné.

- ▶ L'état x appartient à une variété différentielle X , compacte et de dimension n ;
- ▶ le contrôle u appartient à une variété différentielle U compacte et de dimension d_u ;
- ▶ l'observation y appartient à \mathbf{R}^{d_y}

On considère l'application

$$\Theta_{f,h} : X \times U^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$$
$$(x, \underline{u_{2n+1}}) \longmapsto (h(x_0), \dots, h(x_{2n}), \underline{u_{2n+1}})$$

$$x_0 = x, \quad x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), \quad \dots, \quad x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$
$$\underline{u_{2n+1}} = (u_0, \dots, u_{2n})$$

Problème

On s'intéresse à l'observabilité du système échantillonné.

- ▶ L'état x appartient à une variété différentielle X , compacte et de dimension n ;
- ▶ le contrôle u appartient à une variété différentielle U compacte et de dimension d_u ;
- ▶ l'observation y appartient à \mathbf{R}^{d_y}

On considère l'application

$$\Theta_{f,h} : X \times U^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$$
$$(x, \underline{u_{2n+1}}) \longmapsto (h(x_0), \dots, h(x_{2n}), \underline{u_{2n+1}})$$

$$x_0 = x, \quad x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), \quad \dots, \quad x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$
$$\underline{u_{2n+1}} = (u_0, \dots, u_{2n})$$

Difféomorphismes

On note $\Gamma(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de X et $\text{Diff}(X)$ l'ensemble de ses difféomorphismes. Il existe un ouvert \mathcal{D} partout dense dans $\text{Diff}(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R})$ tel que tout système discret $(f, h) \in \mathcal{D}$ est observable.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T : \Gamma(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) &\longrightarrow \text{Diff}(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) \\ (f, h) &\longmapsto (\phi_T^f(\cdot), h) \end{aligned}$$

si \mathcal{O}_T était ouverte, on conclurait que $\Theta_{f,h}$ est injective pour tout (f, h) dans un ouvert dense.

Difféomorphismes

On note $\Gamma(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de X et $\text{Diff}(X)$ l'ensemble de ses difféomorphismes. Il existe un ouvert \mathcal{D} partout dense dans $\text{Diff}(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R})$ tel que tout système discret $(f, h) \in \mathcal{D}$ est observable.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T : \Gamma(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) &\longrightarrow \text{Diff}(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) \\ (f, h) &\longmapsto (\phi_T^f(\cdot), h) \end{aligned}$$

si \mathcal{O}_T était ouverte, on conclurait que $\Theta_{f,h}$ est injective pour tout (f, h) dans un ouvert dense.

Difféomorphismes

Soit X une variété et $\text{Diff}(X)$ l'ensemble des difféomorphismes de X . En général, dans tout voisinage de l'identité, il existe des difféomorphismes qui ne proviennent pas d'un flot de champ de vecteurs.



J. Milnor.

Relativité, groupes et topologie. II, chapter 10. Remarks on infinite-dimensional Lie groups, pages 1007–1057.

North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

Papers from the 40th session of the Les Houches summer school held at Les Houches, June 27–August 4, 1983.

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_T^{u_k}(x_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases}$$

Théorème

Si $d_u = 0$ et $d_y \geq 1$ ou si $d_u > 0$ et $d_y > d_u + 1$, l'ensemble des champs de vecteurs paramétrés $f(\cdot, u)$ tels que le système échantillonné est observable (i.e. $\Theta_{f,h}$ injective) est partout dense.

$$\begin{aligned} \Theta^{f,h} : X \times U^{2n+1} &\longrightarrow \mathbf{R}^{2n+1} \\ (x, \underline{u_{2n+1}}) &\longmapsto (h(x_0, u_0), \dots, h(x_{2n}, u_{2n}), \underline{u_{2n+1}}) \end{aligned}$$

Transversalité

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, et $W \subset Y$ une sous-variété. Nous dirons que f est transverse à W si pour tout $x \in X$, nous avons

- ▶ $f(x) \notin W$ ou bien
- ▶ $f(x) \in W$ et $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df(x) \cdot (T_xX)$.
- ▶ Notation : $f \pitchfork W$

Remarque

Une condition nécessaire pour que l'égalité entre espaces tangents puisse avoir lieu est que

$$\dim W + \dim X \geq \dim Y$$

donc si

$$\text{codim } W \triangleq \dim Y - \dim W > \dim X$$

transversalité signifie non appartenance.

Transversalité

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, et $W \subset Y$ une sous-variété. Nous dirons que f est transverse à W si pour tout $x \in X$, nous avons

- ▶ $f(x) \notin W$ ou bien
- ▶ $f(x) \in W$ et $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df(x) \cdot (T_xX)$.
- ▶ Notation : $f \pitchfork W$

Remarque

Une condition nécessaire pour que l'égalité entre espaces tangents puisse avoir lieu est que

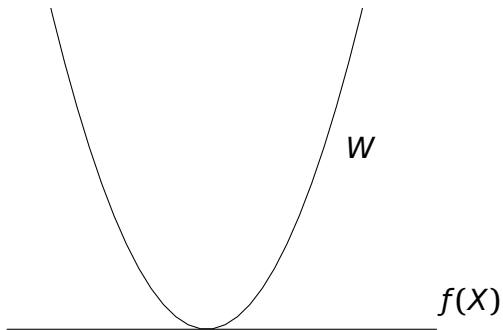
$$\dim W + \dim X \geq \dim Y$$

donc si

$$\text{codim } W \triangleq \dim Y - \dim W > \dim X$$

transversalité signifie non appartenance.

Transversalité



$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Définition 1 Soit \mathcal{A} , M et N des variétés différentielles et $\rho : \mathcal{A} \rightarrow C^r(M, N)$. L'application évaluation est l'application

$$\begin{aligned} \text{ev}_\rho : \mathcal{A} \times M &\longrightarrow N \\ (a, x) &\longmapsto \rho(a)(x) \end{aligned}$$

On dit que ρ est une C^r -représentation si ev_ρ est une application de classe C^r de $\mathcal{A} \times M$ dans N .

Théorème de densité de la transversalité

Théorème

Soient \mathcal{A} , M et N des variétés différentielles ; $\rho : \mathcal{A} \rightarrow C^r(M, N)$ une C^r -représentation et $W \subset N$ une sous-variété. Pour $a \in \mathcal{A}$ fixé, on note

$$\begin{aligned} \rho_a : M &\longrightarrow N \\ x &\longmapsto \rho(a)(x) \end{aligned}$$

et on pose

$$\mathcal{A}_W = \{ a \in \mathcal{A} \mid \rho_a \pitchfork W \}.$$

Supposons que

- ▶ $\dim M < +\infty$, $\text{codim } W < +\infty$
- ▶ \mathcal{A} et M possèdent une base dénombrable de voisinages ;
- ▶ l'application ev_ρ est transverse à W ;

alors \mathcal{A}_W est un résiduel.

Remarque

Dans ce théorème, on ne suppose pas que $\dim \mathcal{A} < +\infty$.

Théorème de densité de la transversalité

Théorème

Soient \mathcal{A} , M et N des variétés différentielles ; $\rho : \mathcal{A} \rightarrow C^r(M, N)$ une C^r -représentation et $W \subset N$ une sous-variété. Pour $a \in \mathcal{A}$ fixé, on note

$$\begin{aligned} \rho_a : M &\longrightarrow N \\ x &\longmapsto \rho(a)(x) \end{aligned}$$

et on pose

$$\mathcal{A}_W = \{ a \in \mathcal{A} \mid \rho_a \pitchfork W \}.$$

Supposons que

- ▶ $\dim M < +\infty$, $\text{codim } W < +\infty$
- ▶ \mathcal{A} et M possèdent une base dénombrable de voisinages ;
- ▶ l'application ev_ρ est transverse à W ;

alors \mathcal{A}_W est un résiduel.

Remarque

Dans ce théorème, on ne suppose pas que $\dim \mathcal{A} < +\infty$.

Notations

On note $\Gamma_U(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs paramétrés de X : ce sont les applications de $X \times U$ dans TX de classe C^∞ et telles que pour tout u fixé, $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs.

On note φ_t^u le flot associé au champ de vecteur $f(\cdot, u)$ (u fixé).

Soit $T > 0$ une période d'échantillonnage fixée, et soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $u_0, u_1, \dots, u_{2n} \in U$ une suite de contrôles, on note x_1, x_2, \dots, x_{2n} la suite définie par

$$x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), x_2 = \varphi_T^{u_1}(x_1), \dots, x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$

On note y_0, \dots, y_{2n} la suite

$$y_0 = h(x_0), \dots, y_{2n} = h(x_{2n})$$

Notations

On note $\Gamma_U(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs paramétrés de X : ce sont les applications de $X \times U$ dans TX de classe C^∞ et telles que pour tout u fixé, $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs.

On note φ_t^u le flot associé au champ de vecteur $f(\cdot, u)$ (u fixé).

Soit $T > 0$ une période d'échantillonnage fixée, et soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $u_0, u_1, \dots, u_{2n} \in U$ une suite de contrôles, on note x_1, x_2, \dots, x_{2n} la suite définie par

$$x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), x_2 = \varphi_T^{u_1}(x_1), \dots, x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$

On note y_0, \dots, y_{2n} la suite

$$y_0 = h(x_0), \dots, y_{2n} = h(x_{2n})$$

Notations

On note $\Gamma_U(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs paramétrés de X : ce sont les applications de $X \times U$ dans TX de classe C^∞ et telles que pour tout u fixé, $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs.

On note φ_t^u le flot associé au champ de vecteur $f(\cdot, u)$ (u fixé).

Soit $T > 0$ une période d'échantillonnage fixée, et soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $u_0, u_1, \dots, u_{2n} \in U$ une suite de contrôles, on note x_1, x_2, \dots, x_{2n} la suite définie par

$$x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), x_2 = \varphi_T^{u_1}(x_1), \dots, x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$

On note y_0, \dots, y_{2n} la suite

$$y_0 = h(x_0), \dots, y_{2n} = h(x_{2n})$$

Notations

On note $\Gamma_U(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs paramétrés de X : ce sont les applications de $X \times U$ dans TX de classe C^∞ et telles que pour tout u fixé, $f(\cdot, u)$ est un champ de vecteurs.

On note φ_t^u le flot associé au champ de vecteur $f(\cdot, u)$ (u fixé).

Soit $T > 0$ une période d'échantillonnage fixée, et soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $u_0, u_1, \dots, u_{2n} \in U$ une suite de contrôles, on note x_1, x_2, \dots, x_{2n} la suite définie par

$$x_1 = \varphi_T^{u_0}(x_0), x_2 = \varphi_T^{u_1}(x_1), \dots, x_{2n} = \varphi_T^{u_{2n-1}}(x_{2n-1})$$

On note y_0, \dots, y_{2n} la suite

$$y_0 = h(x_0), \dots, y_{2n} = h(x_{2n})$$

Notations

Soit x_0 et \bar{x}_0 deux conditions initiales distinctes, et u_0, \dots, u_{2n} une suite de contrôles. Nous avons deux suites de points

$$L = (x_0, \dots, x_{2n}) \quad \text{et} \quad \bar{L} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2n}).$$

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter : on peut avoir $L \cap \bar{L} = \emptyset$, les points de la liste L peuvent être distincts deux à deux mais pas ceux de la liste \bar{L} , etc. La démonstration repose sur la classification des cas de figure possibles et utilise le théorème de densité de la transversalité avec une représentation adaptée dans chaque cas.

Cas général

On pose

- ▶ $\mathcal{A} = \Gamma_U(X) \times C^r(X, \mathbf{R})$;
- ▶ $M = X^{(2)} \times U^{2n+1}$
- ▶ et $N = X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y}$.

On considère la représentation $\rho : \mathcal{A} \rightarrow C^r(M, N)$ définie par

$$\begin{aligned} \rho_{f,h} : X^{(2)} \times U^{2n+1} &\rightarrow X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ (x, \bar{x}, \underline{u_{2n+1}}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{2n}, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2n}, \\ &\quad y_0 - \bar{y}_0, \dots, y_{2n} - \bar{y}_{2n}) . \end{aligned}$$

La sous-variété

$$W \subset X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y}$$

est l'ensemble des éléments $(a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}, 0, \dots, 0)$ tels que $a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}$ sont distincts deux à deux.

Cas général

On pose

- ▶ $\mathcal{A} = \Gamma_U(X) \times C^r(X, \mathbf{R})$;
- ▶ $M = X^{(2)} \times U^{2n+1}$
- ▶ et $N = X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y}$.

On considère la représentation $\rho : \mathcal{A} \rightarrow C^r(M, N)$ définie par

$$\begin{aligned} \rho_{f,h} : X^{(2)} \times U^{2n+1} &\rightarrow X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y} \\ (x, \bar{x}, \underline{u_{2n+1}}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{2n}, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2n}, \\ &\quad y_0 - \bar{y}_0, \dots, y_{2n} - \bar{y}_{2n}) . \end{aligned}$$

La sous-variété

$$W \subset X^{2n+1} \times X^{2n+1} \times \mathbf{R}^{(2n+1)d_y}$$

est l'ensemble des éléments $(a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}, 0, \dots, 0)$ tels que $a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}$ sont distincts deux à deux.

Cas général

On choisit un point

$$\mathcal{X} \triangleq (f, h, x, \bar{x}, \underline{u_{2n+1}}) \in \mathcal{A} \times M$$

tel que $\text{ev}_\rho(\mathcal{X}) \in W$.

On considère un vecteur tangent à $M \times N$ en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$

$$(x, \bar{x}, \eta)$$

avec $x_i \in T_{x_i}X$, $\bar{x}_i \in T_{\bar{x}_i}X$, et $\eta_i \in \mathbf{R}^{d_y}$. Nous devons montrer l'existence de

$$\phi \in \Gamma_U(X), \quad \eta \in C^r(X, \mathbf{R}^{d_y}), \quad \xi \in T_x X, \quad \bar{\xi} \in T_{\bar{x}} X, \quad \nu_i \in T_{u_i} U$$

et d'un vecteur ζ dans l'espace tangent à W en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$ tels que

$$(x, \bar{x}, \eta) = d(\text{ev}_\rho)(\mathcal{X}) \cdot (\phi, \eta, \xi, \bar{\xi}, \nu) + \zeta.$$

Cas général

On choisit un point

$$\mathcal{X} \triangleq (f, h, x, \bar{x}, \underline{u_{2n+1}}) \in \mathcal{A} \times M$$

tel que $\text{ev}_\rho(\mathcal{X}) \in W$.

On considère un vecteur tangent à $M \times N$ en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$

$$(x, \tilde{x}, \eta)$$

avec $x_i \in T_{x_i}X$, $\tilde{x}_i \in T_{\tilde{x}_i}X$, et $\eta_i \in \mathbf{R}^{d_y}$. Nous devons montrer l'existence de

$$\phi \in \Gamma_U(X), \quad \eta \in C^r(X, \mathbf{R}^{d_y}), \quad \xi \in T_x X, \quad \bar{\xi} \in T_{\bar{x}} X, \quad \nu_i \in T_{u_i} U$$

et d'un vecteur ζ dans l'espace tangent à W en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$ tels que

$$(x, \tilde{x}, \eta) = d(\text{ev}_\rho)(\mathcal{X}) \cdot (\phi, \eta, \xi, \bar{\xi}, \nu) + \zeta.$$

Cas général

On choisit un point

$$\mathcal{X} \triangleq (f, h, x, \bar{x}, \underline{u_{2n+1}}) \in \mathcal{A} \times M$$

tel que $\text{ev}_\rho(\mathcal{X}) \in W$.

On considère un vecteur tangent à $M \times N$ en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$

$$(x, \tilde{x}, \eta)$$

avec $x_i \in T_{x_i}X$, $\tilde{x}_i \in T_{\bar{x}_i}X$, et $\eta_i \in \mathbf{R}^{d_y}$. Nous devons montrer l'existence de

$$\phi \in \Gamma_U(X), \quad \eta \in C^r(X, \mathbf{R}^{d_y}), \quad \xi \in T_x X, \quad \bar{\xi} \in T_{\bar{x}} X, \quad \nu_i \in T_{u_i} U$$

et d'un vecteur ζ dans l'espace tangent à W en $\text{ev}_\rho(\mathcal{X})$ tels que

$$(x, \tilde{x}, \eta) = d(\text{ev}_\rho)(\mathcal{X}) \cdot (\phi, \eta, \xi, \bar{\xi}, \nu) + \zeta.$$

Cas général

on choisit

$$\phi = 0, \quad \xi = 0, \quad \bar{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \nu = 0$$

le vecteur ζ s'écrit

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}, \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{2n}, 0, \dots, 0$$

Dans l'équation précédente les $2(2n + 1)$ premières composantes sont

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}, \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{2n}$$

et peuvent être choisies telles que $\alpha = \mathcal{X}$ et $\bar{\alpha} = \bar{\mathcal{X}}$. Les $2n + 1$ dernières composantes s'écrivent

$$\eta_0 - \bar{\eta}_0, \dots, \eta_{2n} - \bar{\eta}_{2n}$$

avec $\eta_i = h(x_i, u_i)$ et $\bar{\eta}_i = h(\bar{x}_i, u_i)$. Comme les points $x_0, \dots, x_{2n}, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2n}$ sont distincts deux à deux, on peut trouver une fonction η telle que $\eta_i - \bar{\eta}_i = \mathcal{Y}_i$.

Cas général

on choisit

$$\phi = 0, \quad \xi = 0, \quad \bar{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \nu = 0$$

le vecteur ζ s'écrit

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}, \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{2n}, 0, \dots, 0$$

Dans l'équation précédente les $2(2n + 1)$ premières composantes sont

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}, \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{2n}$$

et peuvent être choisies telles que $\alpha = \mathcal{X}$ et $\bar{\alpha} = \bar{\mathcal{X}}$. Les $2n + 1$ dernières composantes s'écrivent

$$\eta_0 - \bar{\eta}_0, \dots, \eta_{2n} - \bar{\eta}_{2n}$$

avec $\eta_i = h(x_i, u_i)$ et $\bar{\eta}_i = h(\bar{x}_i, u_i)$. Comme les points $x_0, \dots, x_{2n}, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2n}$ sont distincts deux à deux, on peut trouver une fonction η telle que $\eta_i - \bar{\eta}_i = \mathcal{Y}_i$.

Cas général

L'ensemble \mathcal{R} des couples (f, h) tels que $\rho_{f,h}$ est transverse à W est donc un résiduel.

$$W = \{(a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}, 0, \dots, 0)\}$$

Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned}\text{codim } W &= (2n + 1)d_y \\ &> (2n + 1)(d_u + 1) \\ &= 2n + (2n + 1)d_u + 1 \\ &> \dim(X^{(2)} \times U^{2n+1})\end{aligned}$$

donc transversalité signifie non appartenance.

Donc si $(f, h) \in \mathcal{R}$ et si x_0 et \bar{x}_0 sont tels que les éléments de $L \cup \bar{L}$ sont deux à deux distincts alors, pour un indice $0 \leq i \leq 2n$, $y_i - \bar{y}_i \neq 0$, donc

$$\Theta_{f,h}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq \Theta_{f,h}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}}).$$

Cas général

L'ensemble \mathcal{R} des couples (f, h) tels que $\rho_{f,h}$ est transverse à W est donc un résiduel.

$$W = \{(a_0, \dots, a_{2n}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n}, 0, \dots, 0)\}$$

Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned}\text{codim } W &= (2n + 1)d_y \\ &> (2n + 1)(d_u + 1) \\ &= 2n + (2n + 1)d_u + 1 \\ &> \dim(X^{(2)} \times U^{2n+1})\end{aligned}$$

donc transversalité signifie non appartenance.

Donc si $(f, h) \in \mathcal{R}$ et si x_0 et \bar{x}_0 sont tels que les éléments de $L \cup \bar{L}$ sont deux à deux distincts alors, pour un indice $0 \leq i \leq 2n$, $y_i - \bar{y}_i \neq 0$, donc

$$\Theta_{f,h}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq \Theta_{f,h}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}}).$$

Cas périodique (et sans contrôle)

On suppose que $\varphi_T(x) = x$ et $\varphi_T(\bar{x}) = \bar{x}$ ($x \neq \bar{x}$).

$$\begin{aligned} \text{ev}_\rho : \Gamma(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) \times X^{(2)} &\longrightarrow X^2 \times X^2 \times \mathbf{R} \\ (f, h, x, \bar{x}) &\longmapsto (x, x_1, \bar{x}, \bar{x}_1, y_0 - \bar{y}_0) \end{aligned}$$

W est la sous-variété définie par

$$\begin{aligned} W = \{ (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, 0) \in X^4 \times \mathbf{R} \mid z_1 = z_2, \bar{z}_1 = \bar{z}_2 \}, \\ \text{codim } W = 2n + 1 > \dim X^{(2)} \end{aligned}$$

On est amené à résoudre l'équation

$$(d\varphi_T(x) - \text{Id}) \cdot \xi + I = \tilde{x}$$

► Dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f

Cas périodique (et sans contrôle)

On suppose que $\varphi_T(x) = x$ et $\varphi_T(\bar{x}) = \bar{x}$ ($x \neq \bar{x}$).

$$\begin{aligned} \text{ev}_\rho : \Gamma(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) \times X^{(2)} &\longrightarrow X^2 \times X^2 \times \mathbf{R} \\ (f, h, x, \bar{x}) &\longmapsto (x, x_1, \bar{x}, \bar{x}_1, y_0 - \bar{y}_0) \end{aligned}$$

W est la sous-variété définie par

$$\begin{aligned} W = \{ (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, 0) \in X^4 \times \mathbf{R} \mid z_1 = z_2, \bar{z}_1 = \bar{z}_2 \}, \\ \text{codim } W = 2n + 1 > \dim X^{(2)} \end{aligned}$$

On est amené à résoudre l'équation

$$(d\varphi_T(x) - \text{Id}) \cdot \xi + I = \tilde{x}$$

► Dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f

Cas périodique (et sans contrôle)

On suppose que $\varphi_T(x) = x$ et $\varphi_T(\bar{x}) = \bar{x}$ ($x \neq \bar{x}$).

$$\begin{aligned} \text{ev}_\rho : \Gamma(X) \times C^\infty(X, \mathbf{R}) \times X^{(2)} &\longrightarrow X^2 \times X^2 \times \mathbf{R} \\ (f, h, x, \bar{x}) &\longmapsto (x, x_1, \bar{x}, \bar{x}_1, y_0 - \bar{y}_0) \end{aligned}$$

W est la sous-variété définie par

$$\begin{aligned} W = \{ (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, 0) \in X^4 \times \mathbf{R} \mid z_1 = z_2, \bar{z}_1 = \bar{z}_2 \}, \\ \text{codim } W = 2n + 1 > \dim X^{(2)} \end{aligned}$$

On est amené à résoudre l'équation

$$(d\varphi_T(x) - \text{Id}) \cdot \xi + I = \tilde{x}$$

► Dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f

Cas périodique (et sans contrôle)

Supposons que x soit un point périodique pour le champ f : *i.e.* $\varphi_T(x) = x$, on est amené à calculer la dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f . Soit g un autre champ de vecteurs, on note $\varphi_t^\lambda(x)$ le flot associé à $f + \lambda g$ et on cherche la dérivée de $\varphi_T^\lambda(x)$ en $\lambda = 0$.



$$\varphi_T^\lambda(x) = \varphi_T(x) + \lambda \left. \frac{d\varphi_T^\lambda(x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} + \dots$$

Cas périodique (et sans contrôle)

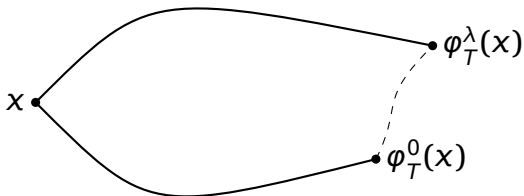
Supposons que x soit un point périodique pour le champ f : *i.e.* $\varphi_T(x) = x$, on est amené à calculer la dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f . Soit g un autre champ de vecteurs, on note $\varphi_t^\lambda(x)$ le flot associé à $f + \lambda g$ et on cherche la dérivée de $\varphi_T^\lambda(x)$ en $\lambda = 0$.



$$\varphi_T^\lambda(x) = \varphi_T(x) + \lambda \left. \frac{d\varphi_T^\lambda(x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} + \dots$$

Cas périodique (et sans contrôle)

Supposons que x soit un point périodique pour le champ f : *i.e.* $\varphi_T(x) = x$, on est amené à calculer la dérivée de $\varphi_T(x)$ par rapport à f . Soit g un autre champ de vecteurs, on note $\varphi_t^\lambda(x)$ le flot associé à $f + \lambda g$ et on cherche la dérivée de $\varphi_T^\lambda(x)$ en $\lambda = 0$.



$$\varphi_T^\lambda(x) = \varphi_T(x) + \lambda \left. \frac{d\varphi_T^\lambda(x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} + \dots$$

Cas périodique

On a une formule explicite pour I

$$I = \int_0^T d\varphi_\sigma \circ g \circ \varphi_{T-\sigma}(x) d\sigma$$

Puisque $\text{ev}_\rho(\mathcal{X}) \in W$, la trajectoire passant par x est périodique. Soit π_0 sa période ; il existe donc $\ell \in \mathbf{N}^*$ tel que $T = \ell \pi_0$.

L'intégrale I peut se réécrire

$$I = \sum_{j=0}^{\ell-1} A^j I_0$$

avec

$$I_0 = \int_0^{\pi_0} d\varphi_\sigma \circ \phi \circ \varphi_{T-\sigma}(x) d\sigma, \quad A = d\varphi_{\pi_0}(x).$$

Cas périodique

L'équation

$$(d\varphi_T(x) - \text{Id}) \cdot \xi + I = \tilde{x}$$

se réécrit

$$(A^\ell - \text{Id}) \cdot \xi + \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} A^j \right) \cdot I_0 = \tilde{x}.$$

L'intégrale I_0 peut être rendue égale à n'importe quel vecteur de $T_x X$ (par un choix judicieux de g). D'autre part le rang de l'application linéaire de $T_x X \times T_x X \rightarrow T_x X$

$$\left(A^\ell - \text{Id} \quad \sum_{j=0}^{\ell-1} A^j \right)$$

est égal à n si les valeurs propres de A sont

- ▶ égales à 1
- ▶ ou de modules différents de 1.

Si $\lambda = 1$ ou si $|\lambda| \neq 1$, $1 + \lambda + \dots + \lambda^{\ell-1} \neq 0$.

Valeurs propres de $d\varphi_{\pi_0}(x)$

Pour un champ de vecteur linéaire

$$d(e^{tA}x) \cdot Ax = e^{tA} \cdot (Ax) = A \cdot e^{tAx}$$

Cette formule se généralise aux champs de vecteurs non linéaires

$$d(\varphi_t(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_t(x))$$

si la trajectoire issue de x est périodique (*i.e.* $\varphi_{\pi_0}(x) = x$), nous avons

$$d(\varphi_{\pi_0}(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_{\pi_0}(x)) = f(x)$$

donc 1 est valeur propre de $d\varphi_{\pi_0}(x)$; qu'en est il des autres valeurs propres ?

Valeurs propres de $d\varphi_{\pi_0}(x)$

Pour un champ de vecteur linéaire

$$d(e^{tA}x) \cdot Ax = e^{tA} \cdot (Ax) = A \cdot e^{tAx}$$

Cette formule se généralise aux champs de vecteurs non linéaires

$$d(\varphi_t(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_t(x))$$

si la trajectoire issue de x est périodique (*i.e.* $\varphi_{\pi_0}(x) = x$), nous avons

$$d(\varphi_{\pi_0}(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_{\pi_0}(x)) = f(x)$$

donc 1 est valeur propre de $d\varphi_{\pi_0}(x)$; qu'en est il des autres valeurs propres ?

Valeurs propres de $d\varphi_{\pi_0}(x)$

Pour un champ de vecteur linéaire

$$d(e^{tA}x) \cdot Ax = e^{tA} \cdot (Ax) = A \cdot e^{tAx}$$

Cette formule se généralise aux champs de vecteurs non linéaires

$$d(\varphi_t(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_t(x))$$

si la trajectoire issue de x est périodique (*i.e.* $\varphi_{\pi_0}(x) = x$), nous avons

$$d(\varphi_{\pi_0}(x)) \cdot f(x) = f(\varphi_{\pi_0}(x)) = f(x)$$

donc 1 est valeur propre de $d\varphi_{\pi_0}(x)$; qu'en est il des autres valeurs propres ?

Propriété G2

Définition 2 (G2) Soit $\alpha > 0$, on dit qu'un champ de vecteur possède la propriété **G2**(α) si pour toute trajectoire périodique de période plus petite que α , la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est 1 et toutes les autres valeurs propres sont de modules différents de 1.

Théorème 1 (Kupka-Smale) L'ensemble $\mathcal{G}_2(\alpha)$ des champs de vecteurs qui possèdent la propriété **G2**(α) est un résiduel pour la topologie C^∞ . Pour la topologie C^r cet ensemble est un ouvert dense.

Propriété G2

Définition 2 (G2) Soit $a > 0$, on dit qu'un champ de vecteur possède la propriété **G2**(a) si pour toute trajectoire périodique de période plus petite que a , la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est 1 et toutes les autres valeurs propres sont de modules différents de 1.

Théorème 1 (Kupka-Smale) L'ensemble $\mathcal{G}_2(a)$ des champs de vecteurs qui possèdent la propriété **G2**(a) est un résiduel pour la topologie C^∞ . Pour la topologie C^r cet ensemble est un ouvert dense.

Propriété G2

La propriété G2 est elle encore vraie pour les champs de vecteurs paramétrés ?



J. Sotomayor.

Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds.

Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (43) :5–46, 1974.

Théorème

Supposons X et U compacts et soit $a > 0$ alors l'ensemble $\mathcal{G}_2^U(a)$ des champs de vecteurs f tels que $f(\cdot, u) \in \mathcal{G}_2(a)$ est un résiduel ; c'est un ouvert dense pour la topologie C^r .

Propriété G2

La propriété G2 est elle encore vraie pour les champs de vecteurs paramétrés ?



J. Sotomayor.

Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds.

Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (43) :5–46, 1974.

Théorème

Supposons X et U compacts et soit $\alpha > 0$ alors l'ensemble $\mathcal{G}_2^U(\alpha)$ des champs de vecteurs f tels que $f(\cdot, u) \in \mathcal{G}_2(\alpha)$ est un résiduel ; c'est un ouvert dense pour la topologie C^r .

Propriété G2

La propriété G2 est elle encore vraie pour les champs de vecteurs paramétrés ?



J. Sotomayor.

Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds.

Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (43) :5–46, 1974.

Théorème

Supposons X et U compacts et soit $a > 0$ alors l'ensemble $\mathcal{G}_2^U(a)$ des champs de vecteurs f tels que $f(\cdot, u) \in \mathcal{G}_2(a)$ est un résiduel ; c'est un ouvert dense pour la topologie C^r .

Conclusions et perspectives

On a montré que $\Theta_{f,h}$ était injective pour tout (f, h) dans un résiduel ; il reste à montrer que $\Theta^{f,h}$ est, génériquement, un plongement.

Échantillonnage non constant.

Pour certains systèmes, la période d'échantillonnage n'est pas une constante mais le moment où on fait une observation dépend de l'état.

Pour le cas sans contrôle, le problème est examiné dans



J P Huke and D S Broomhead.

Embedding theorems for non-uniformly sampled dynamical systems.

Nonlinearity, 20(9) :2205, 2007.

Conclusions et perspectives

On a montré que $\Theta_{f,h}$ était injective pour tout (f, h) dans un résiduel ; il reste à montrer que $\Theta^{f,h}$ est, génériquement, un plongement.

Échantillonnage non constant.

Pour certains systèmes, la période d'échantillonnage n'est pas une constante mais le moment où on fait une observation dépend de l'état.

Pour le cas sans contrôle, le problème est examiné dans



J P Huke and D S Broomhead.

Embedding theorems for non-uniformly sampled dynamical systems.

Nonlinearity, 20(9) :2205, 2007.

Conclusions et perspectives

On a montré que $\Theta_{f,h}$ était injective pour tout (f, h) dans un résiduel ; il reste à montrer que $\Theta^{f,h}$ est, génériquement, un plongement.

Échantillonnage non constant.

Pour certains systèmes, la période d'échantillonnage n'est pas une constante mais le moment où on fait une observation dépend de l'état.

Pour le cas sans contrôle, le problème est examiné dans



[J P Huke and D S Broomhead.](#)

Embedding theorems for non-uniformly sampled dynamical systems.

Nonlinearity, 20(9) :2205, 2007.



Merci de votre attention

Observers for (finite dimensional) nonlinear systems

Work (mainly) in collaboration with P. Bernard and L. Praly

October 6, 2016

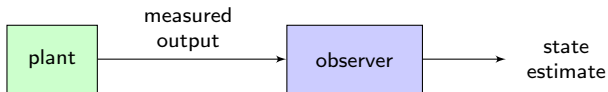


Low-Power High-Gain Observers

Daniele Astolfi

Work (mainly) done in collaboration with L. Marconi and L. Praly.
Thanks to L. Wang, A. Teel and A. Isidori for their hints and suggestions.

Estimation des systèmes dynamiques
ENSEM-CRAN, October 6, 2016



Differential Observability and Observability Forms

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) \\ \zeta = h(\xi) \end{cases} \quad x = \Phi(\xi) \quad \implies \quad \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = \varphi(x) \\ y = x_1 \end{cases}$$

More general observability forms

(non-strict) feedback form

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \\ y = h(x_1, u) \end{cases}$$

relative-degree defined

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \xi_1) \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, & i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{\xi}_r = q(z, \xi) + b(z, \xi)u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

We focus now on systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \varphi(x, d(t)) \\ y &= x_1 + \nu(t)\end{aligned}$$

but the results could be extended to more general triangular forms..

Assumptions:

- φ is a locally Lipschitz function;
- the state $x = (x_1, \dots, x_n)$ evolves in a given compact set $X \subset \mathbb{R}^n$;
- $d(t)$ is some bounded signal which may represent uncertainties (parameter, model) or exogenous unknown inputs;
- $\nu(t)$ is a bounded measurement noise;

Goal: design a robust (semi-global) *tunable* observer

- ✓ asymptotic estimate in nominal conditions ($d(t) \equiv 0$ and $\nu(t) \equiv 0$);
- ✓ robust to uncertainties $d(t)$ and ISS w.r.t. measurement noise;
- ✓ the rate of convergence may be made arbitrarily fast;
- ? sensitivity to measurement noise: trade-off between fast convergence and noise attenuation;

INTRODUCTION TO HIGH-GAIN OBSERVERS

Italian School

- **A. Tornambé**, Use of asymptotic observers having high gains in the state and parameter estimation. Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 1797–1794, **1988**.
- **A. Tornambé**, High-gain observers for non-linear systems. International Journal of Systems Science, vol. 23(9), pp. 331.-337, **1992**.

French School

- **J.P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman**, A simple observer for nonlinear systems application to bioreactors. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37(6), pp. 875–880, **1992**.
- **F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, J. Rakotopara**, High gain estimation for nonlinear systems. System & Control Letters, vol. 18, pp. 295–299, **1992**.
- **J.P. Gauthier, I. Kupka**, Observability and observers for nonlinear systems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 32, pp. 975–994, **1994**.

American School

- **F. Esfandiari and H.K. Khalil**, Observer-based design of uncertain systems: recovering state feedback robustness under matching conditions. Proceedings of Allerton Conference, Monticello, pp. 97–106, **1988**.
- **A. Saberi, P. Sannuti**, Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35(8), pp. 878–897, **1990**.

Italian School

- **A. Tornambé**, Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems *System & Control Letters*, vol. 19, pp. 193–204, 1992.

French-American School

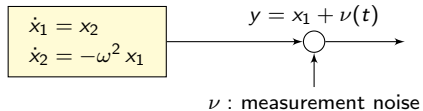
- **A. Teel and L. Praly**, Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback, *Systems and Control Letters*, vol. 22, pp. 313–325, 1994.
- **A. Teel and L. Praly**, Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 33, pp. 1443–1488, 1995.

American School

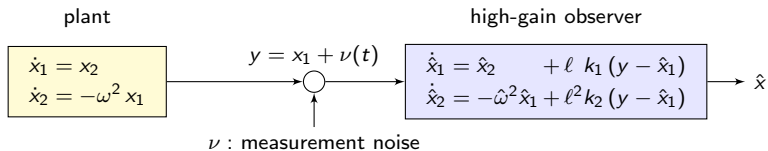
- **A. Atassi and H. K. Khalil**, A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 40 (9), pp. 1672–1687, 1999.

A simple example: the uncertain linear oscillator

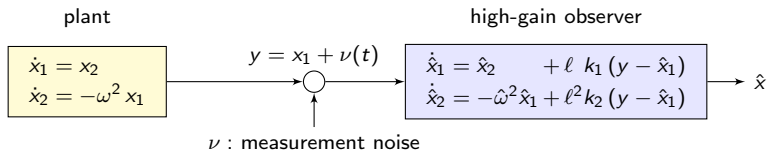
plant



A simple example: the uncertain linear oscillator



- We refer to ℓ as the “high-gain parameter”
- k, k_2 are parameters to be chosen
- $\hat{\omega}^2 = \omega^2 + \epsilon$



- We refer to l as the “high-gain parameter”
- k_1, k_2 are parameters to be chosen
- $\hat{\omega}^2 = \omega^2 + \epsilon$

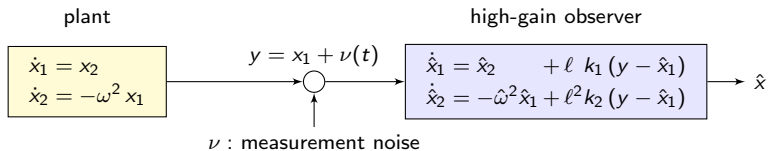
Is the observer convergent?

Change of coordinates: $e_1 := \hat{x}_1 - x_1, \quad e_2 := \frac{\hat{x}_2 - x_2}{l}$

by which we obtain: $\dot{e} = l A e + \frac{1}{l} \Delta(e, d) + l K \nu$

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = - \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\omega}^2 e_1 + d \end{pmatrix}, \quad d = \epsilon x_1.$$

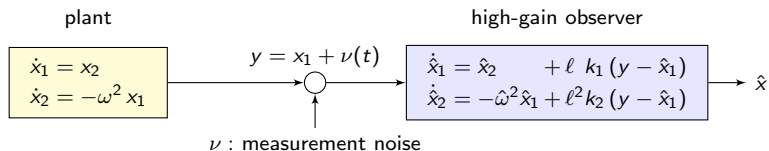
A simple example: the uncertain linear oscillator



If the “high-gain parameter” $\ell \geq 1$ is chosen large enough and $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ then

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell \|\nu\|_{\infty}$$

A simple example: the uncertain linear oscillator

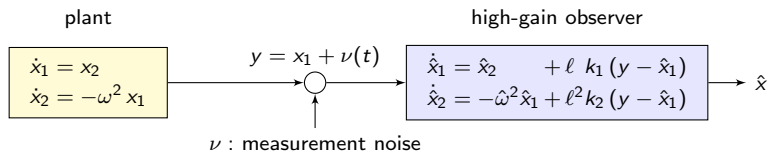


If the “high-gain parameter” $l \geq 1$ is chosen large enough and $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ then

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha l \exp(-\sigma l t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{l} \|d\|_\infty + \gamma l \|\nu\|_\infty$$

- ✓ Asymptotic estimate when $d = 0$, $\nu = 0$
- ✓ Convergence arbitrarily fast: $\exp(-\sigma l t)$
- ✓ Robustness property: $\mu \|d\|_\infty / l$
- ✓ ISS: $\gamma l \|\nu\|_\infty$

A simple example: the uncertain linear oscillator



If the “high-gain parameter” $\ell \geq 1$ is chosen large enough and $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ then

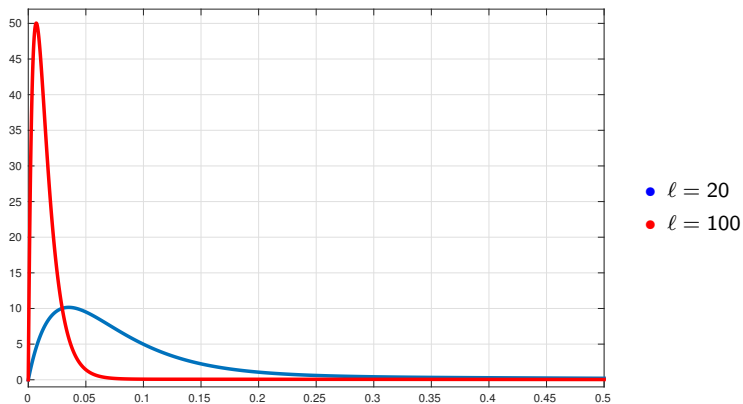
$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell \|\nu\|_{\infty}$$

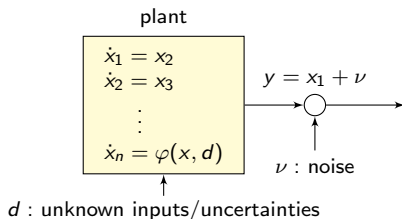
- ✓ Asymptotic estimate when $d = 0$, $\nu = 0$
- ✓ Convergence arbitrarily fast: $\exp(-\sigma \ell t)$
- ✓ Robustness property: $\mu \|d\|_{\infty} / \ell$
- ✓ ISS: $\gamma \ell \|\nu\|_{\infty}$

✗ Peaking phenomenon: $\alpha \ell |\hat{x}(0) - x(0)|$

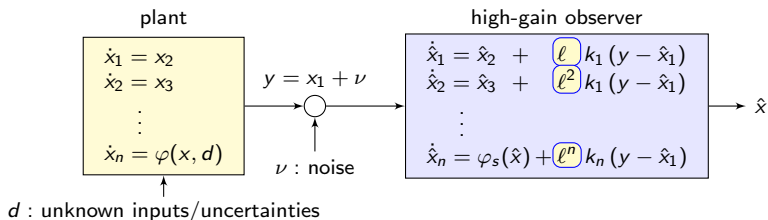
A simple example: the peaking phenomenon

$$|\hat{x}_2(t) - x_2(t)| \leq \alpha \ell \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_\infty$$





- $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ evolves in a compact set $X \subset \mathbb{R}^n$
- φ Locally Lipschitz

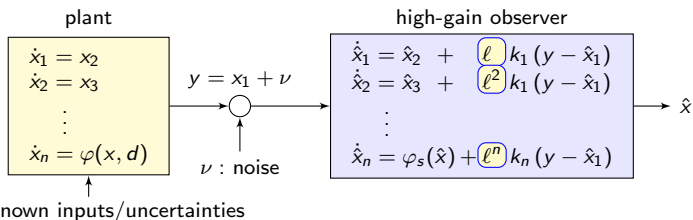


- $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ evolves in a compact set $X \subset \mathbb{R}^n$
- φ Locally Lipschitz

- $\lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n$ Hurwitz
- $\ell \geq 1$ high-gain parameter
- $|\varphi(x, d) - \varphi_s(\hat{x})| \leq L_\varphi |x - \hat{x}| + R$ for all (x, \hat{x}) in $X \times \mathbb{R}^n$, $L_\varphi > 0$, $R > 0$

Remark: with $\varphi_s = 0$ we get a linear “rough” differentiator (also called dirty - derivative observer)

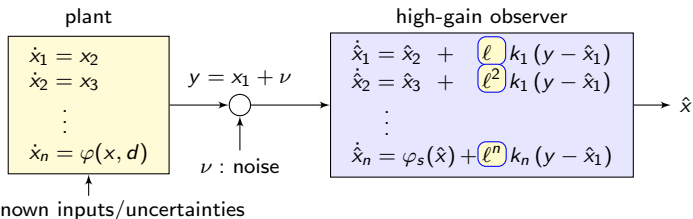
Highlights on high-gain observer: summary



$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$$

- ✓ Asymptotic estimate for ℓ large enough if $d = 0, \nu = 0$
- ✓ Tunability property: $\exp(-\sigma \ell t)$
- ✓ Robustness property: $\mu \|d\|_{\infty} / \ell$
- ✓ ISS property: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$

Highlights on high-gain observer: summary



$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$$

- ✓ Asymptotic estimate for ℓ large enough if $d = 0, \nu = 0$
- ✓ Tunability property: $\exp(-\sigma \ell t)$
- ✓ Robustness property: $\mu \|d\|_{\infty} / \ell$
- ✓ ISS property: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$

- ✗ Peaking phenomenon ($\alpha \ell^{n-1} |\hat{x}(0) - x(0)|$) and numerical implementation (of constants and internal variables) when n (system dimension) is large
- ✗ Bad sensitivity to high-frequency measurement noise: $\bar{\gamma} \ell^n \|\nu\|_{\infty}$

A simple motivation behind the choice of the gains

Observed system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= Lx_n \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Luenberger Observer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + a_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + a_2(y - \hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + a_{n-1}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_n &= L\hat{x}_n + a_n(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

$$e = \hat{x} - x, \quad \dot{e} = Ae$$
$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & L \end{pmatrix}$$

Convergence of the observer is guaranteed only if the matrix A is Hurwitz.

Observed system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= Lx_n \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Luenberger Observer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + a_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + a_2(y - \hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + a_{n-1}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_n &= L\hat{x}_n + a_n(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

$$e = \hat{x} - x, \quad \dot{e} = Ae$$

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & L \end{pmatrix}$$

Convergence of the observer is guaranteed only if the matrix A is Hurwitz.

A simple motivation behind the choice of the gains

Observed system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= L x_n \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Luenberger Observer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + a_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + a_2(y - \hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + a_{n-1}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_n &= L \hat{x}_n + a_n(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

$$e = \hat{x} - x, \quad \dot{e} = A e$$

The polynomial characteristic of A is given by

$$\lambda^n + (a_1 - L)\lambda^{n-1} + (a_2 - a_1 L)\lambda^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2} L)\lambda + (a_n - a_{n-1} L)$$

So a necessary condition for stability of the e -dynamics is

$$a_1 > L, \quad a_2 > a_1 L, \quad \dots, \quad a_{n-1} > a_{n-2} L, \quad a_n > a_{n-1} L$$

which implies

$$a_i > L^i$$

X the gains must grow with powers of L !

- the choice $a_i = k_i \ell^i$ with $\ell > L$ is conservative, but the tuning is easy!

Observed system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= Lx_n \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Luenberger Observer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + a_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + a_2(y - \hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + a_{n-1}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_n &= L\hat{x}_n + a_n(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

$$e = \hat{x} - x, \quad \dot{e} = Ae$$

The polynomial characteristic of A is given by

$$\lambda^n + (a_1 - L)\lambda^{n-1} + (a_2 - a_1L)\lambda^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}L)\lambda + (a_n - a_{n-1}L)$$

So a necessary condition for stability of the e -dynamics is

$$a_1 > L, \quad a_2 > a_1 L, \quad \dots, \quad a_{n-1} > a_{n-2} L, \quad a_n > a_{n-1} L$$

which implies

$$a_i > L^i$$

✗ the gains must grow with powers of L !

- the choice $a_i = k_i \ell^i$ with $\ell > L$ is conservative, but the tuning is easy!

Benefits:

- easy to implement
- tunability property with ℓ
- robust to uncertainties

Drawbacks:

- ✗ the state of the system \hat{x} may exit out of the compact set X
- ✗ numerical issues: implementation of constants (ℓ^n) and variables ($\hat{x}_n \sim \ell^{n-1}|\hat{x}(0) - x(0)|$) with different scaling
- ✗ sensitivity to measurement noise

Question: Can we design an observer which maintains the same “good” features while improving the other drawbacks ?

INTRODUCTION TO LOW-POWER HIGH-GAIN OBSERVERS

plant

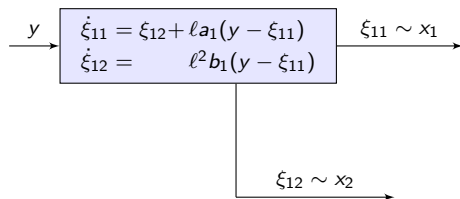
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

\vdots

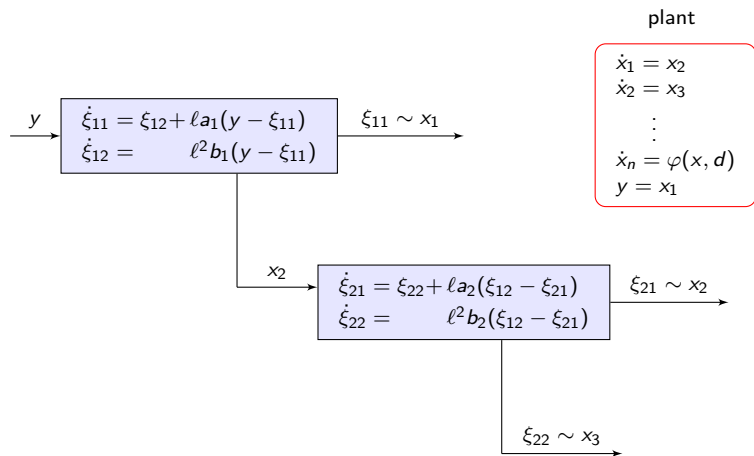
$$\dot{x}_n = \varphi(x, d)$$

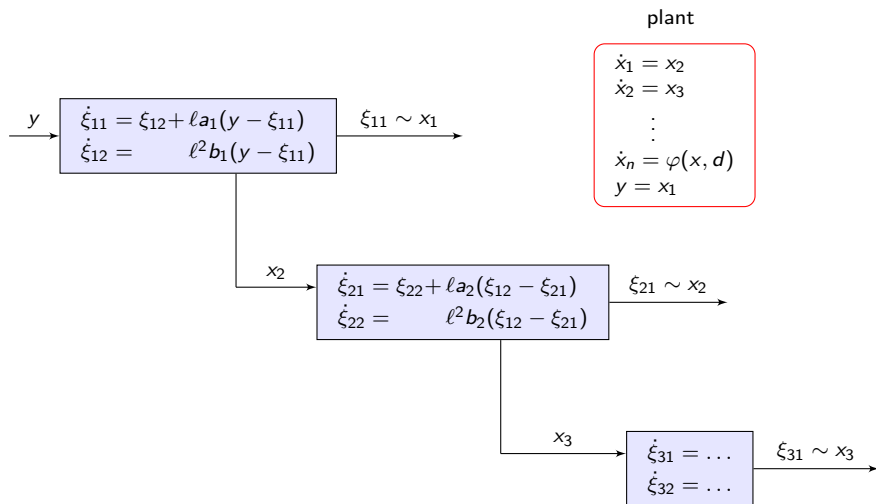
$$y = x_1$$



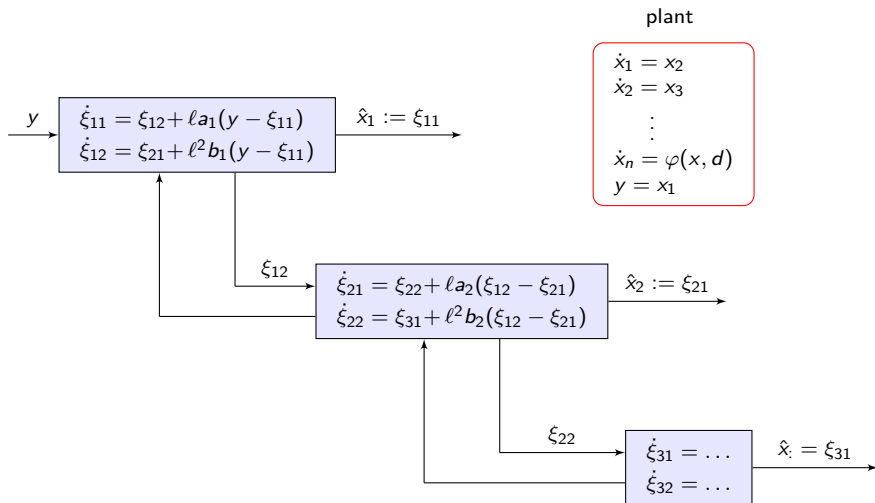
plant

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= \varphi(x, d) \\
 y &= x_1
 \end{aligned}$$

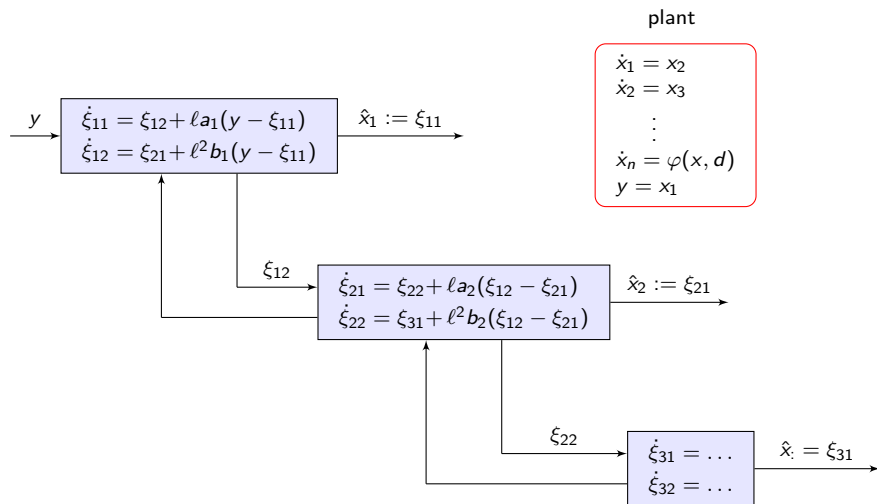




- ✗ note that with this design we cannot achieve asymptotic estimation!
 the *consistency* terms are missing!



- we add the interconnection terms
- for a system of dimension n we need $n - 1$ blocks of dimension 2!



- we add the interconnection terms
- for a system of dimension n we need $n - 1$ blocks of dimension 2!

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22} + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2} + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$$

- ✓ we obtained the same asymptotic bounds of a standard high-gain observer by implementing only terms in ℓ and ℓ^2
- ✓ the relative degree improves the performances in presence of high-frequency measurement noise

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22} + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2} + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_{\infty} + \gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_{\infty}$$

- ✓ we obtained the same asymptotic bounds of a standard high-gain observer by implementing only terms in ℓ and ℓ^2
- ✓ the relative degree improves the performances in presence of high-frequency measurement noise

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22} + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2} + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)| + \frac{\mu}{\ell} \|d\|_\infty + \gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_\infty$$

Open questions

- ✗ design of parameters (a_i, b_i) ✗ noise analysis
- ✗ peaking is still present

For a **standard high-gain observer** the parameters k_i , $i = 1, \dots, n$ must be chosen such that the matrix F is Hurwitz

$$F = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -k_{n-1} & & & & 1 \\ -k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- the eigenvalues of F can be arbitrarily assigned
- the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PF + F^\top P = -I$$

with L_φ Lipschitz constant of $\varphi(\cdot)$

For a **standard high-gain observer** the parameters k_i , $i = 1, \dots, n$ must be chosen such that the matrix F is Hurwitz

$$F = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -k_{n-1} & & & & 1 \\ -k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- the eigenvalues of F can be arbitrarily assigned
- the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PF + F^T P = -I$$

with L_φ Lipschitz constant of $\varphi(\cdot)$

For a **standard high-gain observer** the parameters k_i , $i = 1, \dots, n$ must be chosen such that the matrix F is Hurwitz

$$F = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -k_{n-1} & & & & 1 \\ -k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- the eigenvalues of F can be arbitrarily assigned
- the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PF + F^\top P = -I$$

with L_φ Lipschitz constant of $\varphi(\cdot)$

Likewise, for the **low-power high-gain observer** the parameters (a_i, b_i) must be chosen such that M is Hurwitz

$$M = \begin{pmatrix} E_1 & N & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_2 & E_2 & N & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q_i & E_i & N & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & Q_{n-2} & E_{n-2} & N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}_{(2n-2) \times (2n-2)}$$

$$E_i = \begin{pmatrix} -a_i & 1 \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ the eigenvalues of M can be arbitrarily assigned (with a constructive procedure)
- ✓ the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PM + M^T P = -I$$

Likewise, for the **low-power high-gain observer** the parameters (a_i, b_i) must be chosen such that M is Hurwitz

$$M = \begin{pmatrix} E_1 & N & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_2 & E_2 & N & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q_i & E_i & N & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & Q_{n-2} & E_{n-2} & N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}_{(2n-2) \times (2n-2)}$$

$$E_i = \begin{pmatrix} -a_i & 1 \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ the eigenvalues of M can be arbitrarily assigned (with a constructive procedure)
- ✓ the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PM + M^T P = -I$$

Likewise, for the **low-power high-gain observer** the parameters (a_i, b_i) must be chosen such that M is Hurwitz

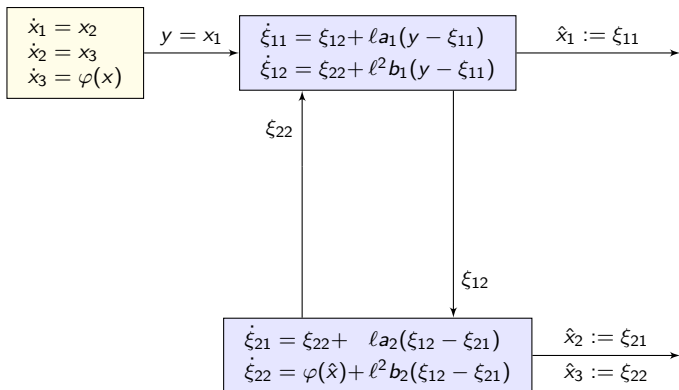
$$M = \begin{pmatrix} E_1 & N & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_2 & E_2 & N & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q_i & E_i & N & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & Q_{n-2} & E_{n-2} & N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}_{(2n-2) \times (2n-2)}$$

$$E_i = \begin{pmatrix} -a_i & 1 \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

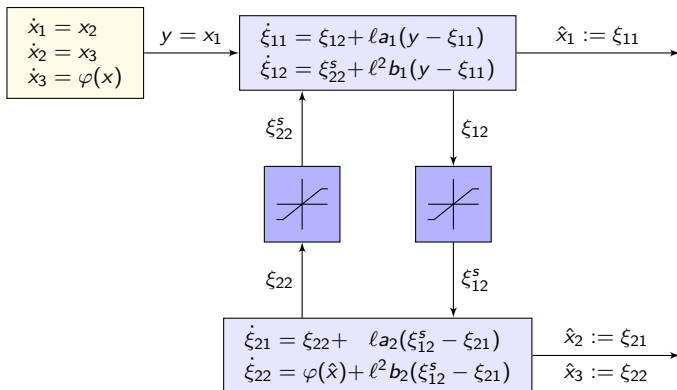
- ✓ the eigenvalues of M can be arbitrarily assigned (with a constructive procedure)
- ✓ the minimum value of ℓ which guarantees convergence is $\ell^* = 2L_\varphi \|P\|$ with

$$PM + M^T P = -I$$

PEAKING-FREE DESIGN OF LOW-POWER HIGH-GAIN OBSERVERS

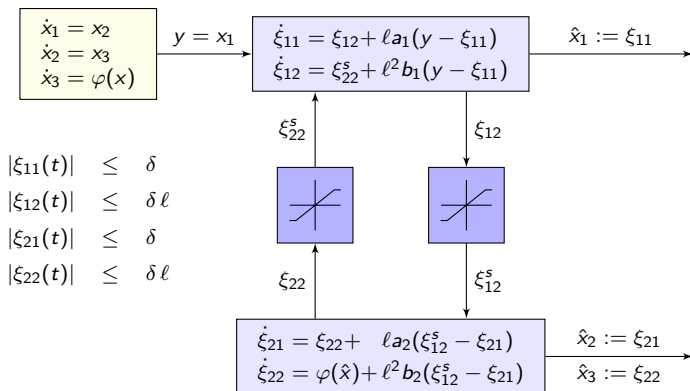


Peaking Phenomenon : $|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^2 \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)|$



Main idea : add *saturations* between the blocks

The saturation levels are chosen coherently with the state X where the system evolves



We do not have anymore peaking in l^2 !

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22} + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2} + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2} - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2} - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)|$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22}^s + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2}^s + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \min \{ \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)|, \delta \ell \}$$

✓ the peaking does not grow with ℓ^{n-1} but only with ℓ

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22}^s + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2}^s + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \min \{ \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)|, \delta \ell \}$$

- ✓ the peaking does not grow with ℓ^{n-1} but only with ℓ
- ✓ the first $n - 1$ estimates $\hat{x}_i := \xi_{i1}$ are peaking-free

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \ell a_1 (y - \xi_{11}) \\
 \dot{\xi}_{12} &= \xi_{22}^s + \ell^2 b_1 (y - \xi_{11}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} + \ell a_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 \dot{\xi}_{i2} &= \xi_{(i+1)2}^s + \ell^2 b_i (\xi_{(i-1)2}^s - \xi_{i1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{(n-1)1} &= \xi_{(n-1)2} + \ell a_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1}) \\
 \dot{\xi}_{(n-1)2} &= \varphi_s(\hat{x}) + \ell^2 b_{n-1} (\xi_{(n-2)2}^s - \xi_{(n-1)1})
 \end{aligned}
 \quad \hat{x} := \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \\ \vdots \\ \xi_{(n-1)1} \\ \xi_{(n-1)2} \end{pmatrix}$$

If (a_i, b_i) are properly chosen and ℓ is large enough then :

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \min \{ \alpha \ell^{n-1} \exp(-\sigma \ell t) |\hat{x}(0) - x(0)|, \delta \ell \}$$

- ✓ the peaking does not grow with ℓ^{n-1} but only with ℓ
- ✓ the first $n - 1$ estimates $\hat{x}_i := \xi_{i1}$ are peaking-free
- ✓ the last estimate $\hat{x}_n := \xi_{(n-1)2}$ and the extra $n - 2$ variables peak with ℓ ,

The parameters (a_i, b_i) must be chosen such that **each sub – block of M is Hurwitz**

$$M = \begin{pmatrix} E_1 & N & 0 & & \dots & \dots & 0 \\ Q_2 & E_2 & N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q_i & E_i & N & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & Q_{n-2} & E_{n-2} & N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}_{(2n-2) \times (2n-2)}$$

$$E_i = \begin{pmatrix} -a_i & 1 \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

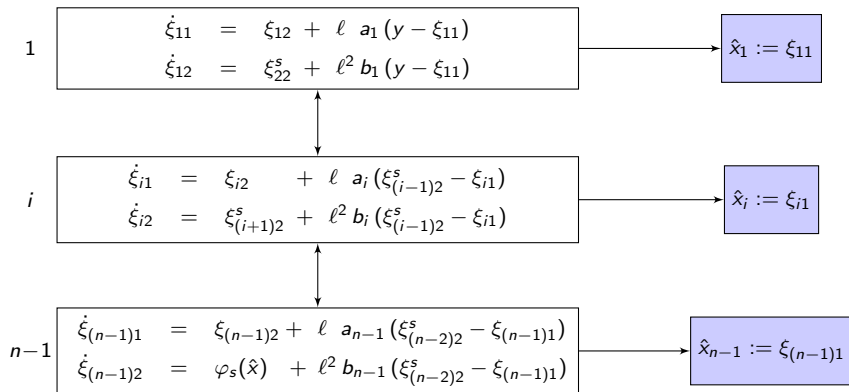
✓ the eigenvalues of M can be arbitrarily assigned

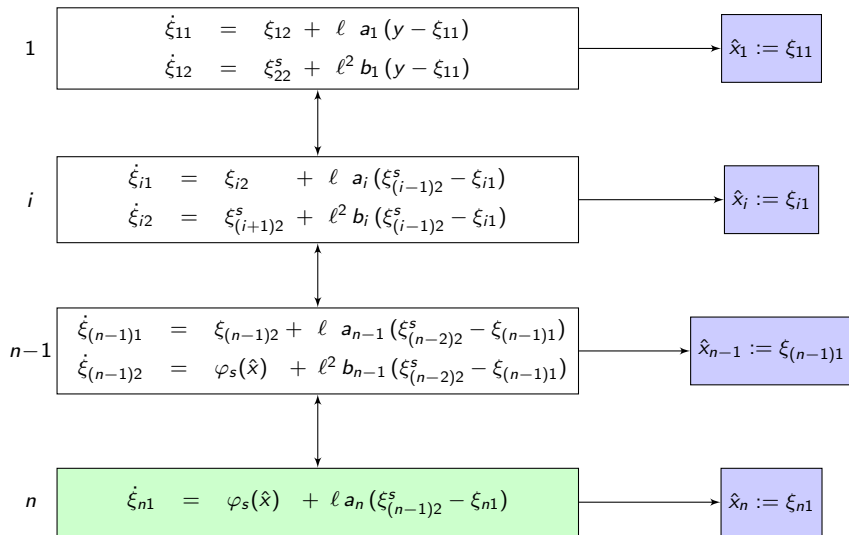
The parameters (a_i, b_i) must be chosen such that **each sub – block of M is Hurwitz**

$$M = \begin{pmatrix} \begin{matrix} E_1 & N & 0 \\ Q_2 & E_2 & N \\ 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & Q_i & E_i \\ \vdots & & & N \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & \dots \\ \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots \\ Q_{n-2} & E_{n-2} \\ \ddots & \ddots \\ 0 & Q_{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ N \\ E_{n-1} \end{matrix} \end{pmatrix}_{(2n-2) \times (2n-2)}$$

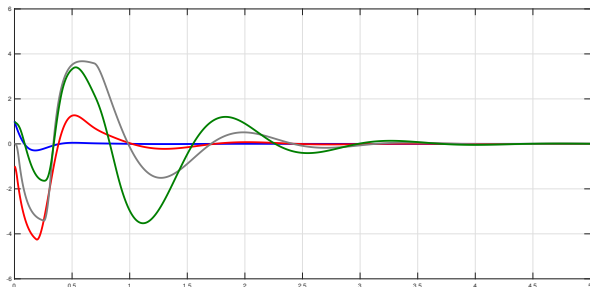
$$E_i = \begin{pmatrix} -a_i & 1 \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ the eigenvalues of M can be arbitrarily assigned
- ✓ we ask for extra-conditions which can be easily verified
- ✓ it is always possible to satisfy the previous conditions





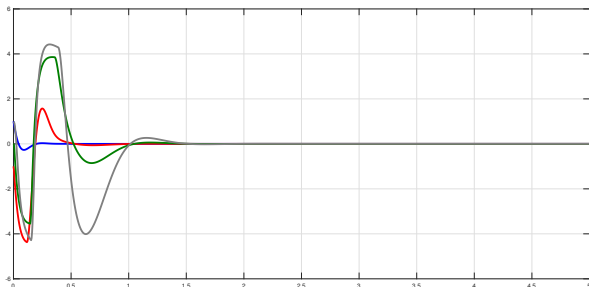
- Dimension of the system: 4
- Dimension of the observer: 7



$\ell = 5$

- $\hat{x}_1(t) - x_1(t)$
- $\hat{x}_2(t) - x_2(t)$
- $\hat{x}_3(t) - x_3(t)$
- $\hat{x}_4(t) - x_4(t)$

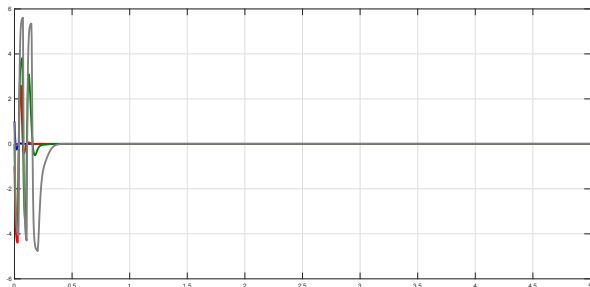
- Dimension of the system: 4
- Dimension of the observer: 7



$\ell = 10$

- $\hat{x}_1(t) - x_1(t)$
- $\hat{x}_2(t) - x_2(t)$
- $\hat{x}_3(t) - x_3(t)$
- $\hat{x}_4(t) - x_4(t)$

- Dimension of the system: 4
- Dimension of the observer: 7



$\ell = 50$

- $\hat{x}_1(t) - x_1(t)$
- $\hat{x}_2(t) - x_2(t)$
- $\hat{x}_3(t) - x_3(t)$
- $\hat{x}_4(t) - x_4(t)$

- ✓ We can apply the same *low-power* methodology to structures more general

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u)\end{aligned}\quad y = h(x_1, u)$$

- ✗ The new observer has dimension $2n - 1$ and it embeds only powers ℓ, ℓ^2
- ✓ The poles of the observer can be arbitrarily assigned
- ✓ The proposed observer guarantees the **same properties** of a standard high-gain observer (asymptotic estimate, tunability property, robustness to uncertainties, ISS w.r.t. measurement noise)
- ✓ The estimates $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ do not have peaking (remain in a compact set $X_\epsilon \supset X$)
- ✓ **Numerical Issue** is **not** any more a problem: implementation of constants in ℓ, ℓ^2 and variables belonging to $O(\ell)$ for a system of dimension n

- ✓ We can apply the same *low-power* methodology to structures more general

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u)\end{aligned}\quad y = h(x_1, u)$$

- ✗ The new observer has dimension $2n - 1$ and it embeds only powers ℓ, ℓ^2
- ✓ The poles of the observer can be arbitrarily assigned
- ✓ The proposed observer guarantees the **same properties** of a standard high-gain observer (asymptotic estimate, tunability property, robustness to uncertainties, ISS w.r.t. measurement noise)
- ✓ The estimates $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ do not have peaking (remain in a compact set $X_\epsilon \supset X$)
- ✓ **Numerical Issue** is **not** any more a problem: implementation of constants in ℓ, ℓ^2 and variables belonging to $O(\ell)$ for a system of dimension n

- ✓ We can apply the same *low-power* methodology to structures more general

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u)\end{aligned}\quad y = h(x_1, u)$$

- ✗ The new observer has dimension $2n - 1$ and it embeds only powers ℓ, ℓ^2
- ✓ The poles of the observer can be arbitrarily assigned
- ✓ The proposed observer guarantees the **same properties** of a standard high-gain observer (asymptotic estimate, tunability property, robustness to uncertainties, ISS w.r.t. measurement noise)
- ✓ The estimates $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ do not have peaking (remain in a compact set $X_\epsilon \supset X$)
- ✓ **Numerical Issue** is **not** any more a problem: implementation of constants in ℓ, ℓ^2 and variables belonging to $O(\ell)$ for a system of dimension n

NONLINEAR OBSERVERS:
SENSITIVITY TO
HIGH-FREQUENCY MEASUREMENT NOISE

- ✗ The characterization of the effect of the noise in the nonlinear framework is not an easy task (complicated by the nonlinearities)
- ✗ Current methods (as far as I know) give only the L^∞ gain
 - L^∞ gain of the standard HGO: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_\infty$
 - L^∞ gain of the Low-Power HGO: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_\infty$
- ✗ Lypaunov Analysis fails in catching the behaviour of the observer at high-frequency (effect of relative degree)

We start studying the properties of a linear High-Gain Observer of dimension 2:

State-Space

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \ell k_1(y - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 &= \ell^2 k_2(y - \xi_1)\end{aligned}$$

Transfer function

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + k_1 \ell s + k_2 \ell^2} \begin{bmatrix} k_1 \ell s + k_2 \ell^2 \\ k_2 \ell^2 s \end{bmatrix}$$

$$\xi_1(s) = G_1(s)y(s)$$

$$\xi_2(s) = G_2(s)y(s)$$

- ✗ The characterization of the effect of the noise in the nonlinear framework is not an easy task (complicated by the nonlinearities)
- ✗ Current methods (as far as I know) give only the L^∞ gain
 - L^∞ gain of the standard HGO: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_\infty$
 - L^∞ gain of the Low-Power HGO: $\gamma \ell^{n-1} \|\nu\|_\infty$
- ✗ Lyapunov Analysis fails in catching the behaviour of the observer at high-frequency (effect of relative degree)

We start studying the properties of a linear High-Gain Observer of dimension 2:

State-Space

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \ell k_1(y - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 &= \ell^2 k_2(y - \xi_1)\end{aligned}$$

Transfer function

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + k_1 \ell s + k_2 \ell^2} \begin{bmatrix} k_1 \ell s + k_2 \ell^2 \\ k_2 \ell^2 s \end{bmatrix}$$

$$\xi_1(s) = G_1(s)y(s)$$

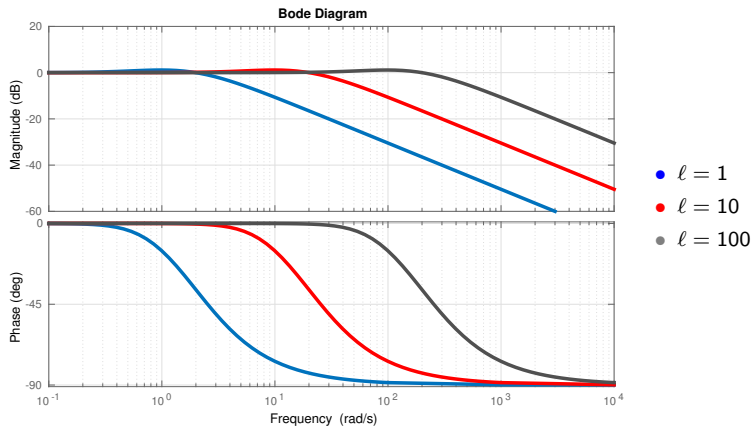
$$\xi_2(s) = G_2(s)y(s)$$

High-gain observer: sensitivity to measurement noise

$$G_1(j\omega) = \frac{k_1 \ell j\omega + k_2 \ell^2}{(j\omega)^2 + k_1 \ell j\omega + k_2 \ell^2}$$

$$L^\infty(G_1) = \gamma$$

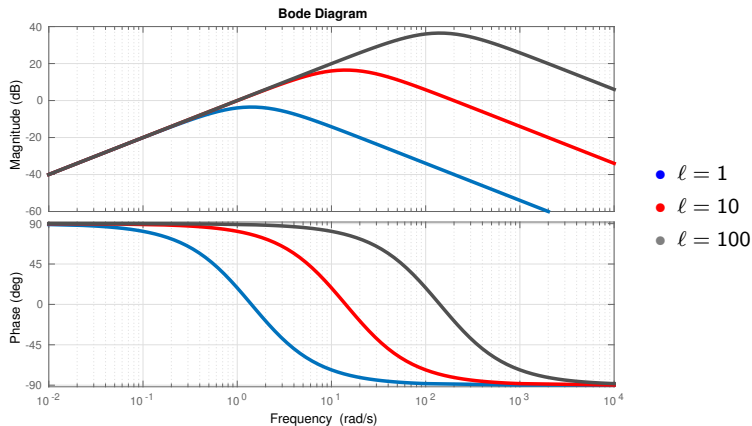
$$|G_1(j\omega)| = \beta \frac{\ell}{\omega} \quad \text{for } \omega \text{ large}$$



$$G_2(j\omega) = \frac{k_2 \ell^2}{(j\omega)^2 + k_1 \ell j\omega + k_2 \ell^2}$$

$$L^\infty(G_2) = \gamma \ell$$

$$|G_2(j\omega)| = \beta \frac{\ell^2}{\omega} \quad \text{for } \omega \text{ large}$$



Linear HGO

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \ell k_1(y - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 + \ell^2 k_2(y - \xi_1) \\ \dot{\xi}_3 &= \ell^3 k_3(y - \xi_1) \end{cases}$$

$$\xi_1(j\omega) = G_1(j\omega)y(j\omega)$$

$$\xi_2(j\omega) = G_2(j\omega)y(j\omega)$$

$$\xi_3(j\omega) = G_3(j\omega)y(j\omega)$$

Linear Low-Power HGO

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \eta_1 + \ell a_1(y - \xi_1) \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 + \ell^2 b_1(y - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 &= \eta_2 + \ell a_2(\eta_1 - \xi_2) \\ \dot{\eta}_2 &= \ell^2 b_2(\eta_1 - \xi_2) \\ \dot{\xi}_3 &= \ell a_3(\eta_2 - \xi_3) \end{cases}$$

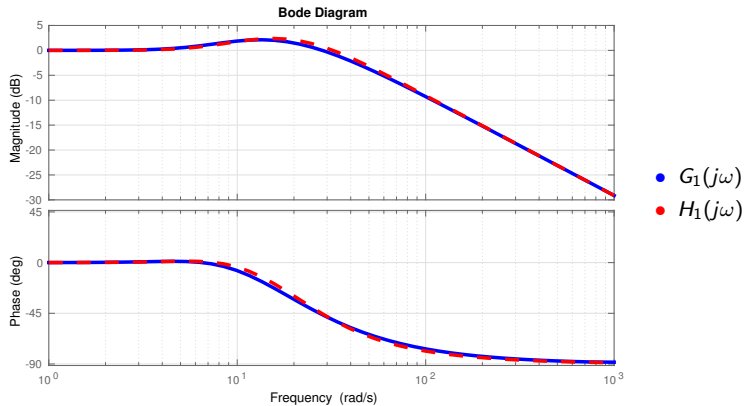
$$\xi_1(j\omega) = H_1(j\omega)y(j\omega)$$

$$\xi_2(j\omega) = H_2(j\omega)y(j\omega)$$

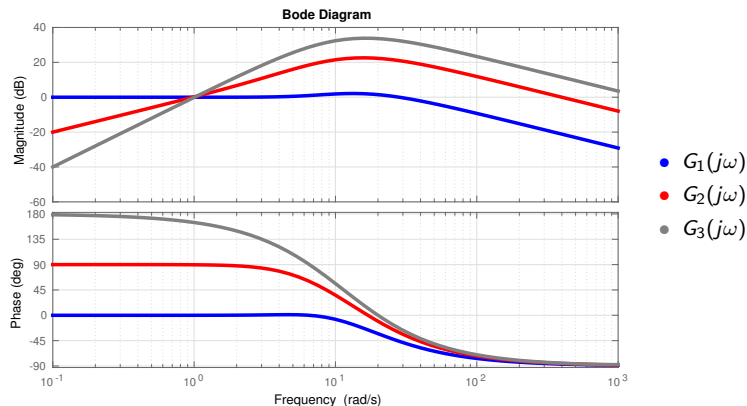
$$\xi_3(j\omega) = H_3(j\omega)y(j\omega)$$

The coefficients k_1, k_2, k_3 and $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ are chosen so that $G_1(j\omega)$ and $H_1(j\omega)$ have the same band.

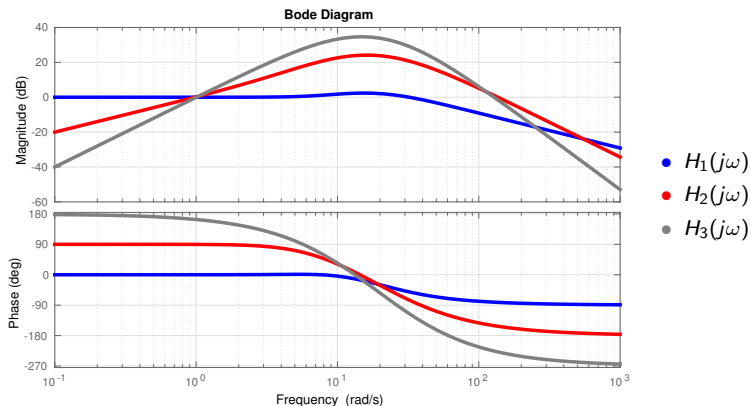
Comparison between HGO and the Low-Power: $G_1(j\omega)$ vs $H_1(j\omega)$



Bode diagram of the linear HGO: $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$, $G_3(j\omega)$



Bode diagram of the linear Low-Power HGO: $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$, $H_3(j\omega)$



- Consider a plant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \varphi(x) \\ y &= Cx + \nu(t)\end{aligned}$$

and the observer

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{x}) + K(y - C\hat{x})$$

- Suppose the noise is generated by a linear system neutrally stable (oscillators) of the form

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{w} &= Sw, \quad \nu = Pw, \\ S &= \text{blockdiag}(S_1, \dots, S_m), \quad S_i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

where ε modulate the frequency of the oscillators.

- Study the steady-state behaviour of the error system

$$\dot{e} = (A - KC)e + \Delta_\varphi(e, x) + K\nu(t)$$

The set $\text{graph}(\pi_\varepsilon) = \{(w, x, e) \in W \times X \times \mathbb{R}^n : e \in \pi_\varepsilon(w, x)\}$ is asymptotically stable for the e -dynamics.

- Consider a plant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \varphi(x) \\ y &= Cx + \nu(t)\end{aligned}$$

and the observer

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{x}) + K(y - C\hat{x})$$

- Suppose the noise is generated by a linear system neutrally stable (oscillators) of the form

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{w} &= Sw, \quad \nu = Pw, \\ S &= \text{blockdiag}(S_1, \dots, S_m), \quad S_i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

where ε modulate the frequency of the oscillators.

- Study the steady-state behaviour of the error system

$$\dot{e} = (A - KC)e + \Delta_\varphi(e, x) + K\nu(t)$$

The set $\text{graph}(\pi_\varepsilon) = \{(w, x, e) \in W \times X \times \mathbb{R}^n : e \in \pi_\varepsilon(w, x)\}$ is asymptotically stable for the e -dynamics.

- Consider a plant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \varphi(x) \\ y &= Cx + \nu(t)\end{aligned}$$

and the observer

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{x}) + K(y - C\hat{x})$$

- Suppose the noise is generated by a linear system neutrally stable (oscillators) of the form

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{w} &= Sw, \quad \nu = Pw, \\ S &= \text{blockdiag}(S_1, \dots, S_m), \quad S_i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

where ε modulate the frequency of the oscillators.

- Study the steady-state behaviour of the error system

$$\dot{e} = (A - KC)e + \Delta_\varphi(e, x) + K\nu(t)$$

The set $\text{graph}(\pi_\varepsilon) = \{((w, x, e)) \in W \times X \times \mathbb{R}^n : e \in \pi_\varepsilon(w, x)\}$ is asymptotically stable for the e -dynamics.

High-Gain Observer

- high-frequency gain (for ε small enough)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon \ell^i \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

Low-Power High-Gain Observer

- high-frequency gain (for ε small enough) for $i = 1, \dots, m$ where $m = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon^i \ell^{2i-1} \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

- high-frequency gain (for ε small enough) for $i = m+1, \dots, n$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon^{n-i+2} \ell \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

Remark: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| = 0$

High-Gain Observer

- high-frequency gain (for ε small enough)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon \ell^i \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

Low-Power High-Gain Observer

- high-frequency gain (for ε small enough) for $i = 1, \dots, m$ where $m = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon^i \ell^{2i-1} \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

- high-frequency gain (for ε small enough) for $i = m+1, \dots, n$

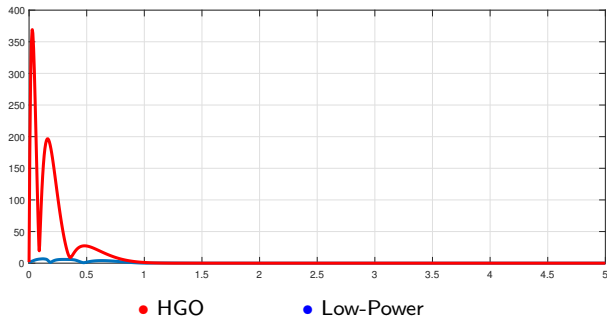
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \beta \varepsilon^{n-i+2} \ell \|\nu(\cdot)\|_\infty$$

Remark: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| = 0$

- System dimension $n = 4$
- High Gain Observer dimension $n = 4$
- Low-Power High-Gain Observer dimension $2n - 1 = 7$
- Gains and coefficients chosen so that they have (approximately) the same rate of convergence in nominal setting
- High-frequency measurement noise (frequency ≥ 1000 Hz, amplitude ≤ 0.1)

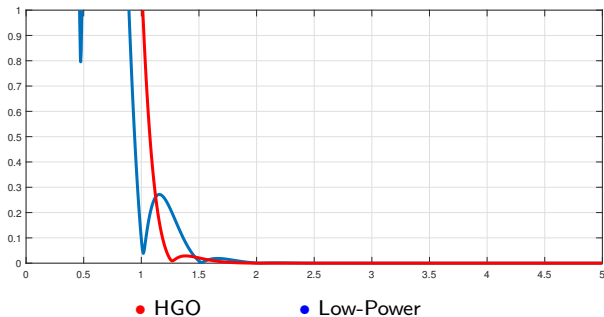
- System dimension $n = 4$
- High Gain Observer dimension $n = 4$
- Low-Power High-Gain Observer dimension $2n - 1 = 7$
- Gains and coefficients chosen so that they have (approximately) the same rate of convergence in nominal setting
- High-frequency measurement noise (frequency ≥ 1000 Hz, amplitude ≤ 0.1)

Nominal convergence (no measurement noise): $|\hat{x}(t) - x(t)|$



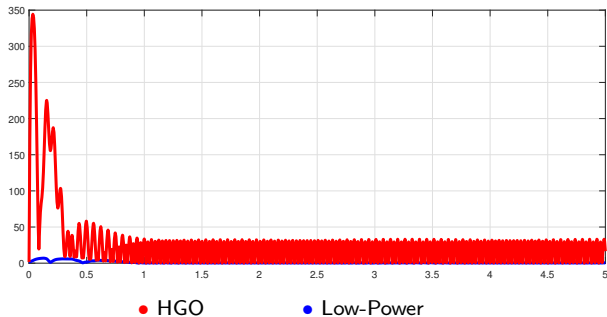
- System dimension $n = 4$
- High Gain Observer dimension $n = 4$
- Low-Power High-Gain Observer dimension $2n - 1 = 7$
- Gains and coefficients chosen so that they have (approximately) the same rate of convergence in nominal setting
- High-frequency measurement noise (frequency ≥ 1000 Hz, amplitude ≤ 0.1)

Nominal convergence (no measurement noise) zoom: $|\hat{x}(t) - x(t)|$



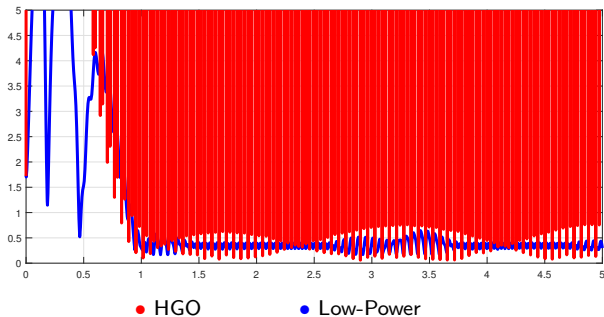
- System dimension $n = 4$
- High Gain Observer dimension $n = 4$
- Low-Power High-Gain Observer dimension $2n - 1 = 7$
- Gains and coefficients chosen so that they have (approximately) the same rate of convergence in nominal setting
- High-frequency measurement noise (frequency ≥ 1000 Hz, amplitude ≤ 0.1)

Convergence in presence of noise: $|\hat{x}(t) - x(t)|$



- System dimension $n = 4$
- High Gain Observer dimension $n = 4$
- Low-Power High-Gain Observer dimension $2n - 1 = 7$
- Gains and coefficients chosen so that they have (approximately) the same rate of convergence in nominal setting
- High-frequency measurement noise (frequency ≥ 1000 Hz, amplitude ≤ 0.1)

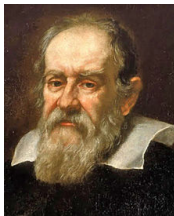
Convergence in presence of noise zoom: $|\hat{x}(t) - x(t)|$



- 1) Astolfi D. and Marconi L., “A *high-gain nonlinear observer with limited gain power*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 60 (11), pp. 3059-3064, November 2015
- 2) L. Wang, D. Astolfi, H. Su, L. Marconi, “*High-gain observers with limited gain power for systems with observability canonical form*”, to appear on Automatica, 2017
- 3) D. Astolfi, L. Marconi, L. Praly and A. Teel, “*Low-power peaking-free high-gain observers*”, submitted to Automatica
- 4) L. Wang, D. Astolfi, H. Su, L. Marconi, A. Isidori, “*Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power*”, presented at MICNON 2015, Volume 48 (11), pp. 730-735, June 2015
- 5) D. Astolfi, L. Marconi, A. Teel, “*Low-power peaking-free high-gain observers for nonlinear systems*”, presented at ECC 2016
- 6) D. Astolfi, L. Marconi, L. Praly, A. Teel, “*Sensitivity to High-Frequency Measurement Noise of Nonlinear High-Gain Observers*”, presented at NOLCOS 2016

Approaching the observation problem

Measure what is measurable and make it measurable what is not so,
Galileo Galilei, 1564-1642, Italy.



An example of Observation problem

Galileo Galelei wrote in 1638 in a book entitled *Dialogues concerning two new sciences*,

I can easily measure the length of a . . . string whose upper end is attached . . . For if I attach to the lower end of this string a rather heavy weight and give it a to-and-from motion,...

Hidden variables

⇒ **Estimate the length of a string**

...and if I ask a friend to count a number of its vibration,...

Measurements

⇒ **angular position of a pendulum**

Then Galileo Galelei gives an [Algorithm](#) to solve this problem.



The model of the system and output

We consider a model described by a differential equation in the form of

(finite dimensional) nonlinear autonomous model with output

$$\dot{x} = f(x) , \quad y = h(x) ,$$

- ▶ x the state is in the state space $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, a **positively invariant** open subset.
- ▶ y the measured output in \mathbb{R}
- ▶ $t \mapsto X(x_0, t)$ is the solution **assumed to be well and uniquely defined**
- ▶ f and h are sufficiently smooth
- ▶ there is no uncertainty = perfect model

We want to estimate $X(x, t)$ from the knowledge of $t \mapsto y(t)$

Example of the length estimation problem

In the case of the length estimation, the model is:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \sin(x_1) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}, \quad y = h(x) = x_1.$$

The system with state $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathcal{X} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

The state space is a manifold

We want to estimate x_3 from the knowledge of $t \mapsto y(t) = X_1(x, t)$

An asymptotic observer

An asymptotic state observer

It is a system

$$\hat{x} = \tau(\hat{z}, y), \quad \dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, y)$$

with state \hat{z} in $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^m$. such that the following two properties hold:

- ▶ For all $(x, \hat{z}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$, the solution $t \mapsto \hat{Z}(x, \hat{z}, t)$ is **well and uniquely defined** in positive time.
- ▶ For any x in \mathcal{X} and for any \hat{z} in \mathcal{Z} :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(x, t) - \hat{X}(x, \hat{z}, t)| = 0$$

where $\hat{X}(x, \hat{z}, t) = \tau(\hat{Z}(x, \hat{z}, t), h(X(x, t)))$.

⇒ **Asymptotic convergence of the estimate toward the state**

First asymptotic observer

For **linear systems**, the observation problem was solved by D.G. Luenberger in

Observing the State of a Linear System, IEEE Transactions on Military Electronics, April 1964.

Let's go back to his approach...

Luenberger Approach

Luenberger idea 1 : Reconstruct a function of the state $T(x)$

Construct

1. a vector field $a(\hat{z}, y)$ on $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
2. a mapping $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$

such that along the system $\dot{x} = f(x)$, $\dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, h(x))$ the set $\{\hat{z} = T(x)\}$ is **invariant** and **attractive**, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\hat{Z}(\hat{z}, x, t) - T(X(x, t))| = 0$$

\Rightarrow *We asymptotically estimate $T(x)$.*

Luenberger idea 2 : If $x \mapsto (T(x), h(x))$ has a left inverse we have a state observer.

Luenberger Approach

In conclusion :

Observer design approach

Design a vector field $a(\hat{z}, y)$ and a mapping $\hat{z} = T(x)$ such that

- ▶ along the system the set $\{\hat{z} = T(x)\}$ is an **invariant** and **attractive** manifold
- ▶ T is **injective relatively to the output** i.e. there exists a mapping τ such that $\tau(T(x), h(x)) = x$

The obtained observer is

$$\dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, y) , \hat{x} = \tau(\hat{z}, y)$$

Outlines of the presentation

In this talk, following this route, we give 3 different approaches:

1. Observers based on detectability conditions
2. Observers based on observability assumptions
 - 2.1 High-gain observers
 - 2.2 Nonlinear Luenberger observers
3. The left inversion problem

An (almost) necessary condition

Theorem¹

Assume \mathcal{X} is **bounded** and assume there exists a smooth vector field $a(\hat{z}, y)$ and a smooth mapping $\hat{z} = T(x)$ such that

- ▶ Along the system, the set $\{\hat{z} = T(x)\}$ is **exponentially attractive** + **stable**
- ▶ $x \mapsto \begin{bmatrix} T(x) \\ h(x) \end{bmatrix}$ is **injective** and **full rank**.

Then there exists $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ such that for all (x, v) in $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$

$$c_1 I \leq P(x) \leq c_2 I$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x)v = 0 \Rightarrow v' \underbrace{\left(\mathcal{L}_f P(x) + 2P(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right)}_{=L_f P(x)} v \leq -\lambda v' P(x)v$$

We call this property : **infinitesimal detectability**.

¹Obtained from Andrieu-Jayawardhana-Praly TAC-2014, (see also Sanfelice-Praly TAC-2009))



Sufficient condition based on detectability

Question : Can we get an observer from infinitesimal detectability ?

Yes, a local one !

Proposition (Sanfelice-Praly TAC-2017)

Assume the system is **infinitesimally detectable** + smoothness and bounds on derivatives then, there exists \underline{k} such that for $k \geq \underline{k}$,

$$\dot{\hat{z}} = f(\hat{z}) - k P(\hat{z})^{-1} \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{z})^\top [h(\hat{z}) - y] \quad , \quad \hat{x} = \hat{z}$$

is a **LOCAL** exponential observer.

- ▶ Semi-global result may be obtained assuming a strong assumption on P and h using the Riemannian length as associated error Lyapunov function.
- ▶ Still ongoing research...

Sufficient condition based on detectability

A particular case

Proposition (Praly IEEE-TAC-2001)

Assume $h(x) = Hx$ (linear in x) and (f, h) is infinitesimally detectable with P constant (Euclidean metric), i.e, for all (x, v) in $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$

$$Hv = 0 \Rightarrow v^T P \frac{\partial f}{\partial x}(x) v \leq -\lambda v^T P v$$

Then, for for each compact subset E of \mathbb{R}^n , we can find a function ℓ_E such that the observer

$$\dot{\hat{z}} = f(\hat{z}) - \ell_E(\hat{z}) P^{-1} H^T [H\hat{z} - y] \quad , \quad \hat{x} = \hat{z}$$

solves the observer convergence problem for all initial condition (x, \hat{z}) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfying $x - \hat{z} \in E$.

\Rightarrow This is a semi-global result.



Case of the length estimation problem

To apply the previous approach, we need to find

$$P(x) = \begin{bmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) & P_{13}(x) \\ P_{12}(x) & P_{22}(x) & P_{23}(x) \\ P_{13}(x) & P_{23}(x) & P_{33}(x) \end{bmatrix}$$

such that $P(x) > 0$ and

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x_2 + \frac{\partial P}{\partial x_2}(x)x_3 \sin(x_1) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} 0 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} P(x) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_3 \cos(x_1) & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} < 0 \quad \forall (v_2, v_3) \end{aligned}$$

\Rightarrow 5 inequalities have to be satisfied by the 6 functions P_{ij} .

An explicit solution is given by L. Praly for x in $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Observers from infinitesimal detectability

By restricting ourselves to some particular class of vector fields, some **global results** may be obtained

- ▶ Global Lipschitz and structured vector field (the high-gain approach)
- ▶ Lipschitz vector fields in some directions
- ▶ Slope restricted nonlinearities (see the work of Arcak, Kokotovic, ...)
- ▶ Output dependent nonlinearities

Some LMI relaxations are available to get constructive algorithms.

A solution (highly) investigated in the literature is to find a **diffeomorphism** which leads to these properties. (See the work of Respondek, Nijmeier, Krener, Isidori, Hammouri ...)

Outlines of the presentation

1. Observers based on detectability conditions
2. Observers based on observability assumptions
 - 2.1 Nonlinear Luenberger observers
 - 2.2 High-gain observers
3. The left inversion problem

Nonlinear Luenberger observers

Following Luenberger approach, we consider the particular case in which

$$\dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, y) = A\hat{z} + B(y)$$

with A in $\mathbb{C}^{m \times m}$ Hurwitz.

Following the observer design recipe²

We wish to design a mapping $T(x)$ such that

1. along the system the set $\{\hat{z} = T(x)\}$ is an **invariant manifold** and **attractive**
2. T is **injective relatively to the output** i.e. there exists a mapping τ such that $\tau(T(x), h(x)) = x$

²This approach for nonlinear system has been initiated by Shoshitaishvili (Theo. of Sing. and its applications, 1991) and Kazantzis-Kravaris (SCL-1998)



Nonlinear Luenberger Observer Approach

For the system

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{\hat{z}} = A\hat{z} + B(h(x))$$

If T is solution of

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x)f(x) = AT(x) + B(h(x))$$

then $\hat{z} = T(x)$ is trivially **invariant** and **attractive**

So, two questions :

- ▶ When does a solution, T exist ? How does it look like ?
- ▶ When is this solution T **injective**

To simplify presentation we assume that \mathcal{X} is backward complete



Question 1 : When does T exists ?

Always !

Theorem (Andrieu-Praly (SIAM J. C. and Opt. 06)³)

For *each* Hurwitz matrix A we can find a C^1 function B such that a *weak* solution T *exists*.

Moreover, if h is C^1 , there exists ℓ such that T is C^1 if

$$\text{real}(\text{eigen}(A)) \leq -\ell$$

A General Expression :

$$T(x) = \int_{-\infty}^0 \exp(-As) B(h(X(x, s))) ds$$

³see also Kreisselmeir-Engel (IEEE TAC 03)



How does it look like on example ?

For the length estimation problem

In the case of the length estimation, the model is:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \sin(x_1) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}, y = h(x) = x_1 .$$

We take A diagonal. For each eigen value λ of A , the pde is:

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial x_1}(x) x_2 + \frac{\partial T_\lambda}{\partial x_2}(x) x_3 \sin(x_1) = \lambda T_\lambda(x) + \sin(x_1)$$

a solution is $T_\lambda(x) = \text{Mapple... too complex !}$

Trick = Dynamic extension

How does it look like on example ?

For the length estimation problem

In the case of the length estimation, the model is:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \sin(x_1) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}, \quad y = h(x) = x_1 .$$

We take A diagonal. For each eigen value λ of A , the pde is:

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial x_1}(x) x_2 + \frac{\partial T_\lambda}{\partial x_2}(x) x_3 \sin(x_1) + \frac{\partial T_\lambda}{\partial c}(x) \varphi(x_1, c) = \lambda (T_\lambda(x) + \sin(x_1))$$

There exists solution in the form

$$T(x) = c_1 x_3 + c_2 x_2 + \sin(x_1)$$

where,

$$\dot{c}_1 = \varphi_1(x_1, c) = \lambda c_1 + c_2 \sin(x_1), \quad \dot{c}_2 = \varphi_2(x_1, c) = \lambda c_2 + \cos(x_1)$$



Question 2 : When is this solution injective ?

Depends on observability and m !

1. Backward distinguishability
2. On the length estimation problem

Backward distinguishability

Backward distinguishability

$\forall x_1 \neq x_2$ in $\text{cl}(\mathcal{A})$ there exists a negative time t , such that we have :

$$h(X(x_1, t)) \neq h(X(x_2, t)) .$$

= The present state x can be distinguished from other states by looking at the past output paths

Question 2 : When is this solution injective ?

Theorem (Andrieu-Praly (SIAM J. C. and Opt.-2006))

Assume the system is *backward distinguishable*. Then, with choosing any injective C^1 function $b : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$, and *picking* $m = n + 1$, \exists a positive real number ℓ and a subset S of \mathbb{C}^{n+1} with zero Lebesgue measure such that the function $T = (T_{\lambda_i}) : \text{cl}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^{(n+1)}$ defined as :

$$T_{\lambda_i}(x) = \int_{-\infty}^0 \exp(-\lambda_i s) b(h(X_m(x, s))) ds$$

is *injective* provided the $n + 1$ complex numbers λ_i are (arbitrary) in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$ and with real part strictly smaller than ℓ .

\Rightarrow If the system is Backward distinguishable, there exists an observer !



Question 2 : When is this solution injective ?

case of the length estimation problem

We have

$$T(x) = M(t) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + B_\lambda \sin(x_1)$$

where

$$M(t) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} \end{bmatrix}$$

where,

$$\dot{c}_{i,1} = \lambda c_{i,1} + c_{i,2} \sin(x_1) , \quad \dot{c}_{i,2} = \lambda c_{i,2} + \cos(x_1)$$

It can be shown that M is of rank 2 if we pick $m = 3$

Case of the length estimation problem

Ultimately the nonlinear Luenberger observer is, for $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\dot{\hat{z}}_i = \lambda_i (\hat{z}_i - \sin(\theta))$$

$$\dot{\hat{c}}_{i1} = \lambda_i c_{i1} + c_{i2} \sin(\theta) \quad , \quad \dot{\hat{c}}_{i2} = \lambda_i c_{i2} - \cos(\theta)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} c_{1\ell} & c_{1\omega} \\ c_{2\ell} & c_{2\omega} \\ c_{3\ell} & c_{3\omega} \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{(1 \ 0) (M_3^T M_3)^{-1} M_3^T} \left[\hat{z} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \sin(x_1) \right]$$

Conclusion on the Nonlinear Luenberger observer

- ▶ A Nonlinear Luenberger observer is theoretically a very powerful tool. **If the system is observable, there exists one !**
- ▶ Many issue remains to be solved to make it a solution for practice
- ▶ Has been employed with success for the estimation of mechanical coordinates in electrical machines,
- ▶ It is a very powerful tool for identification of linear systems⁴

Very promising ongoing research !

⁴Afri-Andrieu-Bako-Dufour TAC-2016



Outlines of the presentation

1. Observers based on detectability conditions
2. Observers based on observability assumptions
 - 2.1 Nonlinear Luenberger observers
 - 2.2 High-gain observers
3. The left inversion problem

Tunable observers

Consider

- ▶ the autonomous system
- ▶ \mathfrak{D} a “set” of observers
- ▶ $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ a bounded set of initial conditions

Tunable observer set

For all time t_d , for all $\epsilon > 0$ there exists an asymptotic observer in \mathfrak{D}

$$\dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, y), \quad \hat{x} = \tau(\hat{z}, y)$$

such that for all x we have

$$\left| X(x, t) - \hat{X}(0, x, t) \right| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_d, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Necessary condition for tunable observers

Proposition (Andrieu et.al IEEE CDC 2014)

Assume there exists a set \mathcal{D} of tunable observer. Then for all x_a and x_b in \mathcal{A}^2 such that there exists t_d such that

$$h(X(x_a, t)) = h(X(x_b, t)) , \forall t \in [0, t_d)$$

then we have,

$$x_a = x_b .$$

This property is called **Instantaneous distinguishability**

When the system is sufficiently smooth, this fast property may be checked from the time derivatives of the output.



On the length estimation problem

Consider

$$H_4(x) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \sin(x_1) \\ x_3 x_2 \cos(x_1) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow injective in an open subset \mathcal{A} of \mathcal{X} defined as

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X}, (x_1, x_2) \neq 0\}$$

\Rightarrow the mapping H_4 is injective *at least* in \mathcal{A} and the pendulum model is instantaneously distinguishable at \mathcal{A} .

On the length estimation problem

1. By looking at the successive output time derivatives evaluated at time 0 we may get an injective map on some open sets of the state space.
2. The more you differentiate the output the bigger this open set is.
3. The sequence of set in which we have this injectivity property is stationary (it ends).

These facts are true for all analytic systems⁵.

⁵See Andrieu (SIAM J. C. and Opt.-2014)



In Conclusion

It gives some hint on how to solve the estimation problem:

$$y(t)$$



Estimate the $m - 1$ first time derivatives of the output at each time:

$$T(x) = \widehat{H}_m(x) = \left(\widehat{y}, \widehat{\dot{y}}, \widehat{\ddot{y}} \dots, \widehat{y^{m-1}} \right)$$



Apply τ such that $\tau(H_m(x)) = x$

$$\hat{x} = \tau \left(\widehat{y}, \widehat{\dot{y}}, \widehat{\ddot{y}} \dots, \widehat{y^{m-1}} \right)$$

This is the **high-gain observer approach**



Model of the output derivatives

Assumption

There exists $m \geq 0$ and an open subset \mathcal{A} of $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ such that the mapping $H_m : \mathcal{A} \rightarrow H_m(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^m$ is injective.

Along the solution of the system we have,

$$\overbrace{H_m(x)}^{\dot{\quad}} = A H_m(x) + B L_f h_m(x)$$

with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \dots & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Model of the output derivatives

Injectivity of $H_m \Rightarrow$ there exists $\varphi_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that

$$\varphi_m(H_m(x)) = L_f h_m(x), \forall x \in \mathcal{A}.$$

$\Rightarrow z = H_m(x)$ is an invariant manifold of the system

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{z} = Az + B\varphi_m(z),$$

1. We can focus on estimating the state of the z system with $y = z_1$
2. Due to the structure of the z subsystem, we know how to design P solution to the detectability equation !

$$v_1 = 0 \Rightarrow v' P \left[A + B \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}(z) \right] v < 0$$

Example

The length estimation problem

when $\sin(z_1)^2 + z_2^2 \cos(z_1)^2 \neq 0$, it yields

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= f_{z_4}(z) = (\tau(z))_3^2 z_2 \sin(z_1) \cos(z_1) - (\tau(z))_3 z_2^2 \sin(z_1) \end{cases}$$

with,

$$(\tau(z))_3 = \frac{z_3 \sin(z_1) + z_4 z_2 \cos(z_1)}{\sin(z_1)^2 + z_2^2 \cos(z_1)^2} .$$

Knowing $y = \hat{z}_1$ can we design an observer for this system ?

YES !!

Example

The length estimation problem

Ultimately, the high-gain observer for the length estimation problem is

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(y - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(y - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + L^3k_3(y - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_4 &= (\tau(\hat{z}))_3^2 \hat{z}_2 \sin(y) \cos(y) - (\tau(\hat{z}))_3 \hat{z}_2^2 \sin(y) + L^4k_4(y - \hat{z}_1) \end{cases}$$

with,

$$(\tau(\hat{z}))_3 = \frac{\hat{z}_3 \sin(y) + \hat{z}_4 \hat{z}_2 \cos(y)}{\sin(y)^2 + \hat{z}_2^2 \cos(y)^2}.$$

and,

$$\hat{x}_1 = \hat{z}_1, \quad \hat{x}_2 = \hat{z}_2, \quad \hat{x}_3 = (\tau(\hat{z}))_3$$

Conclusion on the high-gain observer

- ▶ High-gain observer are the most popular observer
- ▶ It has some issues. But some tools are now available to attenuate them
(See the presentation of Daniele)

Outlines of the presentation

1. Observers based on detectability conditions
2. Observers based on observability assumptions
 - 2.1 Nonlinear Luenberger observers
 - 2.2 High-gain observers
3. The left inversion problem

The left inversion problem for observer

The recipe :

Observer design approach

Design a vector field $a(\hat{z}, y)$ and a mapping $\hat{z} = T(x)$ such that

- ▶ along the system the set $\{\hat{z} = T(x)\}$ is an **invariant** and **attractive** manifold
- ▶ T is **injective relatively to the output** i.e. there exists a mapping τ such that $\tau(T(x), h(x)) = x$

The obtained observer is

$$\dot{\hat{z}} = a(\hat{z}, y) , \hat{x} = \tau(\hat{z}, y)$$

To construct the observer, we need to construct τ such that $\tau(T(x), h(x)) = x$.

The left inversion problem for observer

- ▶ The construction of a left inverse to T may be very difficult
- ▶ Most of the time rely on the use of optimization procedure. A possible solution for τ is given by:

$$\tau(z) = \text{ArgMin}_x |T(x, h(x)) - z|^2$$

Problem : This approach, based on optimization procedure may be difficult to implement !

Given an observer, can we *realize* it without computing the left inverse?

The diffeomorphism case

In the particular case where T is a diffeomorphism $T : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
The observer may be implemented in the original coordinates as

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\hat{x}) \right)^{-1} a(T(\hat{x}), y) \\ &= f(\hat{x}) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\hat{x}) \right)^{-1} [a(T(\hat{x}), y) - a(T(x), y)].\end{aligned}$$

\Rightarrow In this case we don't need the left inverse !

Can we extend this approach to the case where T is an immersion
 $T : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow T(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$?

A possible solution without inversion

Theorem (Bernard-Andrieu-Praly 2017)

Assume there exists an open subset $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ containing $\mathcal{X} \times \{0\}$ and a diffeomorphism $T_e : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfying

$$T_e(x, 0) = T(x) \quad \forall x \in \mathcal{X} ,$$

and

$$T_e(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^m$$

Then the system

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}}^{\cdot} = \left(\frac{\partial T_e}{\partial (\hat{x}, \hat{w})}(\hat{x}, \hat{w}) \right)^{-1} a(T_e(\hat{x}, \hat{w}), \hat{x}, y)$$

defines an observer, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \hat{W}(x, \hat{x}, \hat{w}, t) \right| + \left| X(x, t) - \hat{X}(x, \hat{x}, \hat{w}, t) \right| = 0 .$$

A possible solution without inversion

With this theorem, we introduce two subproblems

Problem 1:

Given an injective immersion $T : \mathcal{X} \rightarrow T(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^m$ can we find a couple (T_a, \mathcal{O}) such that $T_a : \mathcal{O} \rightarrow T_a(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m$ is a diffeomorphism, $\text{cl}(\mathcal{X} \times \{0\}) \subset \mathcal{O}$ and

$$T_e(x, 0) = T(x) \quad \forall x \in \mathcal{X} ,$$

Problem 2:

Let \mathcal{O} be an open subset of \mathbb{R}^m and $T_a : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a diffeomorphism. Given a compact set K in \mathcal{O} , can we find a diffeomorphism $T_e : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that

$$T_e(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^m \quad , \quad T_e(x) = T_a(x) \quad \forall x \in K .$$

A possible solution without inversion

Proposition (Bernard-Andrieu-Praly 2017)

If \mathcal{X} is contractible, then Problem 1 is solvable. Moreover for some values of m and n we can give explicit solution for T_a .

Proposition (Bernard-Andrieu-Praly 2017)

If \mathcal{O} is C^2 -diffeomorphic to \mathbb{R}^m , then Problem 2 is solvable.

By restricting ourselves to some specific data some constructive methods are possible.



Conclusion

- ▶ Observer for finite dimensional nonlinear systems is still an active research area
- ▶ Some problems that need to be adressed:
 - ▶ Robustness issue : how to parameterized the observer with respect to the **model of uncertainties** ?
 - ▶ Problem of system **with inputs**⁶

⁶Bernard-Praly-Andrieu Automatica 2017

